Ken Binmore

La teoría de juegos

Una breve introducción



Economía

Alianza Editorial

Ciencias sociales

Ken Binmore

La teoría de juegos

Una breve introducción



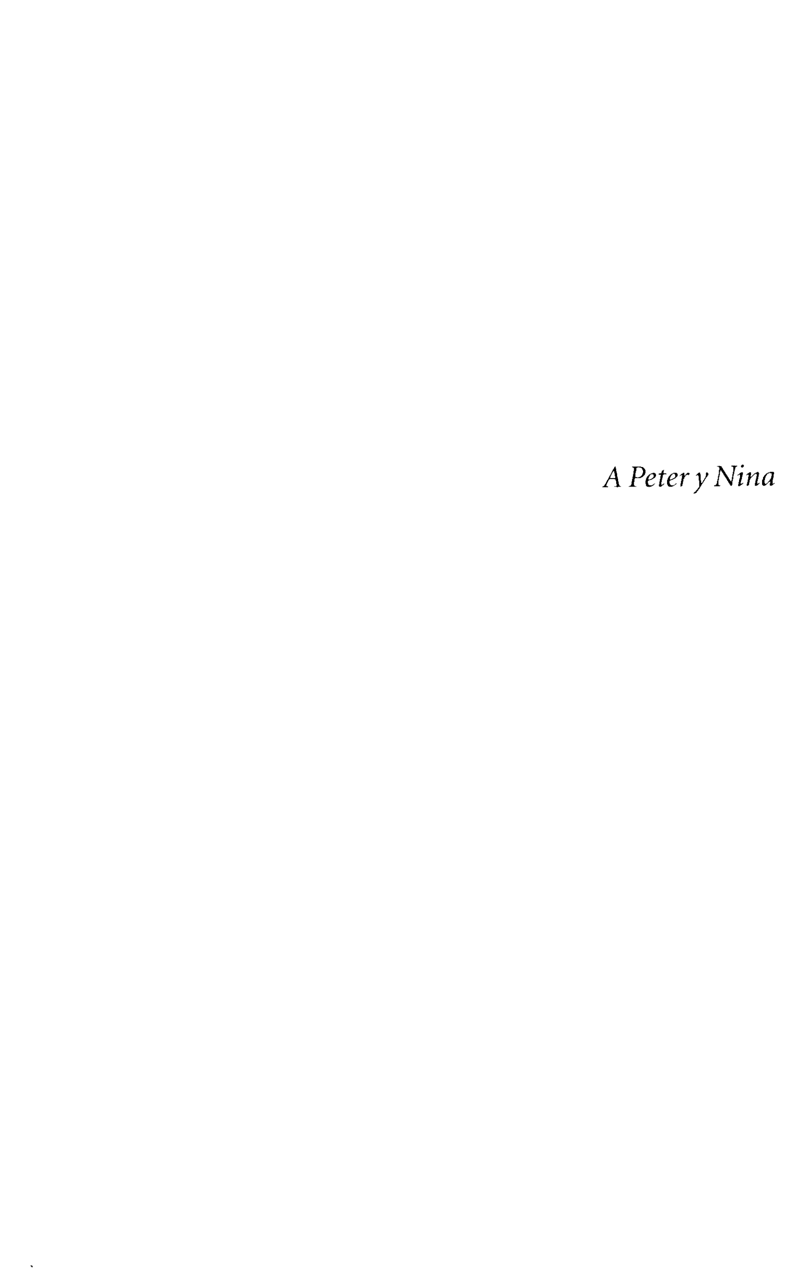
El libro de bolsillo
Economía
Alianza Editorial

Título original: *Game Theory. A Very Short Introduction*
Publicado originalmente en inglés en 2007.
Esta traducción se ha realizado por acuerdo
con Oxford University Press.
Traducción: Pepe Ventura López



Diseño de cubierta: Alianza Editorial
Ilustración de cubierta: José Luis Collada

Calle Juan Ignacio Luca de Tena, 15
28027 Madrid; teléfono 91 393 88 88
www.alianzaeditorial.es
ISBN: 978-84-206-4987-0
Depósito legal: M.12.056-2009
Compuesto e impreso en Fernández Ciudad, S. L.
Coto de Doñana, 10. 28320 Pinto (Madrid)
Printed in Spain



A Peter y Nina

1. A qué jugamos

¿De qué trata la teoría de juegos?

Mientras mi esposa se ausentaba por un día para asistir a una pequeña y agradable conferencia en la Toscana, tres mujeres jóvenes me invitaron a comer con ellas. Cuando me senté, una dijo con voz seductora: «enséñanos a jugar al juego del amor», pero resultó que lo único que querían era consejo sobre cómo lidiar con novios italianos. Sigo pensando que se equivocaban al rechazar mis recomendaciones estratégicas, pero acertaron al dar por sentado que el cortejo es uno de los muchos tipos de juegos en los que participamos en la vida real.

Los conductores que maniobran en medio de un tráfico denso juegan a un juego de conducción. Los buscadores de gangas que pujan en eBay juegan a un juego de subastas. Una empresa y un sindicato que negocian los salarios del año siguiente juegan a un

juego de negociación. Cuando los candidatos enfrentados escogen su programa en unas elecciones, juegan a un juego político. El propietario de una tienda de comestibles que decide el precio de los cereales para hoy juega a un juego económico. En resumen, cuando dos seres humanos interactúan, se está jugando a un juego.

Marco Antonio y Cleopatra jugaron al cortejo a gran escala. Bill Gates se hizo inmensamente rico gracias al juego del software informático. El juego que llevaron a cabo Adolf Hitler y Iosif Stalin acabó con una parte significativa de la población mundial. Kruschev y Kennedy también desarrollaron un juego durante la crisis de los misiles cubanos que podría habernos borrado del mapa por completo.

Con un campo de aplicación tan amplio, la teoría de juegos sería la panacea universal si siempre pudiera predecir de qué modo jugará la gente a los juegos en los que en gran medida consiste la vida social. Sin embargo, esta teoría no es capaz de solucionar todos los problemas del mundo, porque sólo funciona cuando los individuos juegan *racionalmente*. Por consiguiente, no puede predecir el comportamiento de unos adolescentes enfermos de amor como Romeo y Julieta, o de dementes como Hitler o Stalin. No obstante, la gente no siempre se comporta irracionalmente, y, por lo tanto, estudiar lo que pasa cuando usan sus cerebros para pensar no es una pérdida de tiempo. La mayoría de nosotros al menos intentamos gastar nuestro dinero con

sensatez; y no lo hacemos demasiado mal la mayor parte del tiempo o la teoría económica no funcionaría en absoluto.

Aun cuando las personas no hayan pensado en todo de antemano, ello no significa que necesariamente se comporten de una manera irracional. La teoría de juegos ha tenido algunos éxitos significativos a la hora de explicar el comportamiento de las arañas y los peces, de los que en absoluto puede considerarse que piensen. Estos animales carentes de inteligencia acaban por comportarse como si fueran racionales, porque los rivales cuyos genes los programaban para comportarse irracionalmente ya se han extinguido. De un modo similar, las empresas no siempre están dirigidas por grandes intelectos, pero el mercado a menudo es igual de despiadado que la naturaleza a la hora de eliminar del medio a los no aptos.

¿Funciona la teoría de juegos?

A pesar de sus éxitos teóricos, los hombres de negocios pragmáticos solían despreciar la teoría de juegos por considerarla una rama intelectual más de las ciencias sociales, pero cambiaron de idea de la noche a la mañana después de que el gobierno estadounidense decidiera subastar las licencias de varias frecuencias de radio para su uso en redes de telefonía móvil.

A falta de expertos autorizados que se ocuparan de ello, el consejo de los expertos en teoría de juegos se reveló decisivo para determinar el diseño de las reglas de las subastas que se emplearon. El resultado fue que el contribuyente estadounidense consiguió unos beneficios de 20.000 millones de dólares, más del doble de la predicción ortodoxa. Posteriormente consiguió todavía más al subastar en Gran Bretaña varias licencias de comunicaciones, de la que fui responsable; obtuvimos un total de 35.000 millones de dólares en una sola subasta. A consecuencia de ello, ¡la revista *Newsweek* me definió como un despiadado economista jugador de Póquer que había destruido la industria de las telecomunicaciones!

Como se demostró, la industria de las telecomunicaciones no fue destruida. Tampoco era en absoluto despiadado hacer que los peces gordos de la industria de las telecomunicaciones pagaran por sus licencias lo que creyeran que valían; especialmente cuando el dinero se empleó en hospitales para aquellos que no pueden costearse asistencia médica privada. En cuanto al Póquer, hace al menos veinte años que no juego más que unos céntimos. En lo único que acertó *Newsweek* es que la teoría de juegos realmente funciona cuando es aplicada por personas que saben lo que hacen. No solamente funciona en economía, sino también en biología evolutiva y en ciencia política. Con mi reciente libro *Natural Justice*, incluso escandalicé a los filósofos de la moral al emplear la teoría de juegos para hablar de ética.

Juegos básicos

Cada nueva subasta de telecomunicaciones de gran nivel debe diseñarse de acuerdo con las circunstancias en las que se va a realizar. No puede aplicarse un diseño prefabricado, como descubrió el gobierno estadounidense cuando contrató a Sotheby's para subastar un montón de repetidores por satélite. Pero tampoco pueden incluirse todos los detalles de un nuevo mercado de las telecomunicaciones en un modelo matemático. Diseñar una subasta de telecomunicaciones es, por consiguiente, tanto un arte como una ciencia. Se hace una extrapolación a partir de modelos simples que imitan lo que parecen ser las características estratégicas esenciales de un problema.

Intento hacer lo mismo en este libro, por lo que no utilizo términos del álgebra y solamente un mínimo de jerga técnica, que se centra únicamente en juegos básicos *(toy games)* y deja de lado todos los complicados pormenores de la vida real. Sin embargo, la mayoría de la gente se da cuenta de que incluso los juegos básicos les ofrecen mucho sobre lo que reflexionar.

Conflicto y cooperación

La mayoría de juegos de este libro tienen solamente dos jugadores, llamados Alice y Bob. El primero que vamos a ver es el Juego de las Monedas.

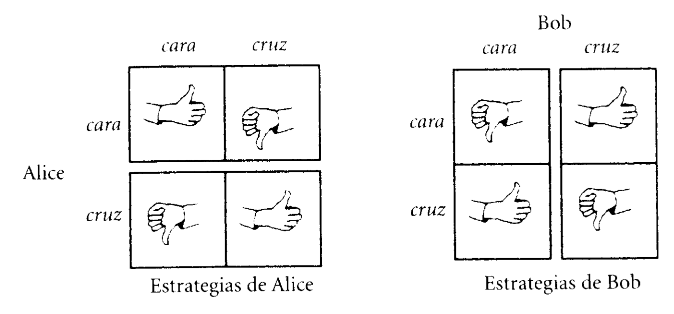


FIGURA 1. Problema de decisión de Alice y Bob en el Juego de las Monedas.

Sherlock Holmes y el malvado profesor Moriarty jugaban a las monedas de camino a su confrontación final en las cascadas de Reichenbach. Holmes tenía que decidir en qué estación bajarse del tren. Moriarty tenía que decidir en qué estación esperar. Un equivalente en la vida real se desarrollaría entre contables deshonestos y sus auditores. Los primeros deciden cuándo defraudar y los segundos cuándo inspeccionar los libros.

En nuestra versión en forma de modelo básico, Alice y Bob muestran una moneda cada uno. Alice gana si ambas monedas muestran la misma cara. Bob gana si muestran caras diferentes. Por consiguiente, Alice y Bob tienen dos estrategias cada uno, *cara* o *cruz*. La Figura 1 muestra quién gana y quién pierde en todas las combinaciones entre estrategias. Estos resultados son los *pagos* que reciben los participantes en el juego. Los iconos de pulgares hacia

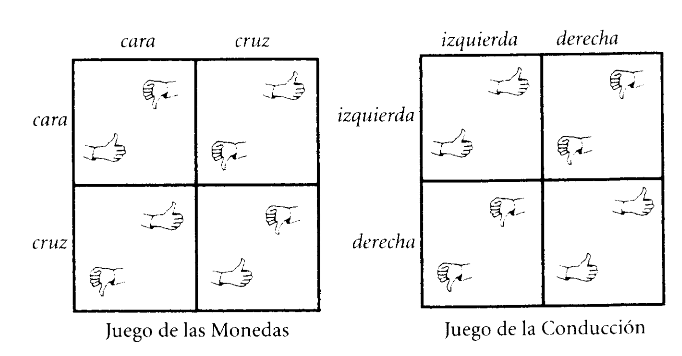


FIGURA 2. Tablas de pagos. Alice escoge una fila y Bob escoge una columna.

arriba o hacia abajo se emplean para subrayar que los pagos no tienen por qué medirse en términos monetarios.

La Figura 2 muestra cómo toda la información de la Figura 1 puede agruparse en una tabla de pagos, con los pagos de Alice en la esquina inferior izquierda de cada celda y los de Bob en la esquina superior derecha. También muestra una versión para dos jugadores del Juego de la Conducción en el que participamos todas las mañanas cuando nos metemos en el coche para ir a trabajar. Una vez más, Alice y Bob pueden elegir entre dos estrategias puras, *izquierda* y *derecha,* pero en este caso los pagos de los jugadores se encuentran totalmente alineados en lugar de oponerse diametralmente. Cuando los periodistas hablan de una situación en la que todos ganan (en inglés *win-win),* tienen en mente algo similar al Juego de la Conducción.

Von Neumann

El primer resultado de la teoría de juegos fue el teorema del minimax de John von Neumann, que se aplica solamente a juegos como el de las monedas, en el cual los jugadores se definen como enemigos implacables. Todavía pueden leerse algunos comentarios desdeñosos sobre la teoría de juegos en los cuales Von Neumann es caricaturizado como el arquetípico guerrero frío, como el que inspiró al doctor Strangelove en la conocida película. Nos dicen que sólo un estratega militar enloquecido pensaría en aplicar la teoría de juegos en la vida real, porque únicamente un loco o un ciborg cometería el error de suponer que el mundo es un juego de puro conflicto.

Von Neumann era un genio en todos los aspectos. Inventar la teoría de juegos fue solamente algo secundario para él. Es cierto que durante la Guerra Fría fue un halcón[1], pero, lejos de ser un ciborg loco, era un tipo genial al que le gustaba la fiesta y pasarlo bien. Como tú y yo, prefería la cooperación al conflicto, pero también entendía que el medio para conseguir la cooperación no consiste en fingir que la gente no puede beneficiarse en ocasiones si se causan problemas.

La cooperación y el conflicto son dos caras de la misma moneda, ninguna de las cuales puede expli-

1. En política, se aplica el término «halcón» para definir a los partidarios de programas o medidas más intransigentes o agresivos. *(N. del T.)*

carse sin tener en cuenta la otra. Reflexionar sobre un juego de conflicto puro como el Juego de las Monedas no equivale a afirmar que todas las interacciones humanas sean competitivas. Tampoco se está afirmando que toda la interacción humana es cooperativa cuando se analiza un juego de coordinación pura como el Juego de la Conducción. Simplemente se distinguen dos aspectos distintos del comportamiento humano que pueden estudiarse por separado.

Preferencias reveladas

Para tratar a la vez de la cooperación y el conflicto, es necesaria una forma de describir la motivación de los jugadores, y no limitarse a decir que les gusta ganar y les desagrada perder. Para tal fin, los economistas inventaron la idea de *utilidad*, que permite a cada jugador asignar un valor numérico a cada posible resultado del juego.

En los negocios, lo fundamental suelen ser los beneficios, pero los economistas saben que los seres humanos a menudo tienen objetivos más complejos que simplemente ganar todo el dinero posible. Por lo tanto, no podemos identificar la utilidad con el dinero. Una respuesta inocente consiste en sustituir el dinero por la felicidad. Pero ¿qué es la felicidad?, ¿cómo se mide?

Resulta desafortunado que la palabra «utilidad» se encuentre vinculada históricamente a los utilita-

ristas victorianos como Jeremy Bentham y John Stuart Mill, porque los economistas modernos no identifican de la utilidad con cuánto placer o cuán poco dolor puede sentir una persona. La teoría moderna rechaza cualquier intento de explicar cómo se comportan los individuos en términos de qué pasa dentro de sus mentes. Por el contrario, convierte el hecho de no establecer supuestos psicológicos en una virtud.

No intentamos explicar *por qué* Alice o Bob se comportan de una determinada manera. En lugar de una teoría explicativa, tenemos que contentarnos con una teoría descriptiva, que no puede hacer otra cosa que decir que Alice o Bob estarían actuando de un modo incoherente si en el pasado hicieron eso y aquello pero ahora planean hacer esto y lo otro. En la teoría de juegos, el objeto consiste en observar las decisiones que toman (o tomarían) Alice y Bob cuando no están interactuando el uno con el otro o con un tercero, así como deducir cómo se comportarán cuando interactúen en un juego.

Por lo tanto, no sostenemos que algunas preferencias son más racionales que otras. Estamos de acuerdo con el gran filósofo David Hume, que consideraba la razón «esclava de las pasiones». Como afirmó con extravagancia, no habría nada *irracional* en su preferencia por la destrucción del universo entero frente a rascarse el dedo. No obstante, nosotros vamos más allá en este camino, ya que consideramos la razón como un instrumento para evitar un compor-

tamiento incoherente. Por consiguiente, todo comportamiento coherente cuenta como racional.

Con algunos supuestos ligeros, puede demostrarse que actuar coherentemente es lo mismo que comportarse como si se intentara maximizar el valor de algo. Independientemente de lo que este «algo» abstracto pudiera ser en un contexto determinado, los economistas lo llaman «utilidad». No tiene que estar correlacionado con el dinero, pero a menudo lo está.

Asumir riesgos

Cuando actúa coherentemente, Alice puede no ser consciente de que se comporta como si maximizara algo a lo que decidimos denominar «su utilidad». Pero si queremos predecir su comportamiento, debemos ser capaces de medir su utilidad en una escala de utilidad, similar en gran medida al modo de medir la temperatura con un termómetro. Igual que las unidades de un termómetro se llaman grados, podemos decir que un *útil* es una unidad en la escala de utilidad de Alice.

En economía, la ortodoxia solía establecer que las escalas cardinales de utilidad carecían de un sentido intrínseco, pero afortunadamente Von Neumann no lo sabía cuando Oskar Morgenstern apareció un día en su casa para quejarse de que en el libro de teoría de juegos que escribían juntos no tenían una base adecuada para los pagos numéricos. De modo que

Von Neumann inventó en ese mismo momento una teoría que cuantifica en qué medida Alice desea algo en función de los riesgos que está dispuesta a asumir para conseguirlo. A partir de ahí podemos descubrir qué decisiones tomará en situaciones de riesgo y determinar la opción que le proporcionará la mayor utilidad media.

Es fácil usar la teoría de Von Neumann para saber cuánta utilidad se le puede asignar a algo que Alice pueda tener que evaluar. Por ejemplo, ¿cuántos útiles debería asignar Alice para conseguir una cita con Bob?

En primer lugar debemos decidir qué escala de utilidad vamos a usar. Para tal fin, hay que seleccionar dos resultados, que serán el mejor y el peor respectivamente de cualquier otro resultado que Alice tenga probabilidades de encontrar. Estos resultados se corresponderán con los puntos de ebullición y de congelación del agua usada para calibrar un termómetro Celsius, de modo que la escala de utilidad a construir asignará 0 útiles al peor resultado y 100 útiles al mejor. A continuación hay que considerar una gran cantidad de boletos de lotería (gratuitos) en los cuales los únicos premios son o bien el mejor resultado o el peor.

Si le ofrecemos a Alice boletos de lotería con probabilidades cada vez mayores de conseguir el mejor resultado en lugar de la cita con Bob, finalmente pasará de decir *no* a decir *sí*. Si la probabilidad de que el mejor resultado en el boleto de lotería que la hace

cambiar de idea es de un 75%, la teoría de Von Neumann establece que para ella la cita con Bob vale 75 útiles. Cada punto porcentual adicional que se suma a la probabilidad que la hace indiferente corresponde con un útil extra.

Cuando algunos individuos evalúan sumas de dinero mediante este método, siempre asignan el mismo número de útiles a cada dólar extra. Denominamos a estas personas «neutrales al riesgo». Aquellos que asignan menos útiles a cada dólar extra que al anterior se denominan «aversos al riesgo».

Seguros

Alice está sopesando aceptar una oferta de Bob para asegurar su mansión de Beverly Hills contra los incendios. Si rechaza su oferta, se enfrentará a una lotería en la que acabará con su casa más el coste de la prima del seguro si la casa no se incendia y únicamente con la prima si se incendia; este resultado debe compararse con el valor de la casa menos el coste de la prima si ella acepta la oferta de Bob.

Si es racional para Bob hacer la oferta y para Alice aceptarla, él debe pensar que la lotería es mejor que el resultado asegurado, mientras que ella debe tener la preferencia contraria. Por lo tanto, la existencia de empresas de seguros no sólo confirma que puede ser racional apostar, en el caso de que los riesgos que se asumen sean riesgos calculados, sino también que

las personas racionales pueden tener actitudes distintas a la hora de tomar riesgos. En el mundo de los seguros, los aseguradores están cerca de una postura neutral al riesgo y los asegurados son aversos al riesgo en diferentes grados.

Hay que tener en cuenta que los economistas consideran el grado de aversión al riesgo que muestra una persona como una cuestión de preferencias personales. Del mismo modo que Alice puede preferir o no el helado de chocolate al de vainilla, puede preferir o no dedicar 1.000 dólares a asegurar su casa. Algunos filósofos, entre los que destaca John Rawls, insisten en que es *racional* ser averso al riesgo cuando se defiende cualquier alternativa distinta a maximizar la utilidad media que pueda preferirse, pero estos argumentos no comprenden que las actitudes de los jugadores respecto a asumir riesgos ya se han tenido en cuenta al emplear el método de Von Neumann para asignar utilidades a cada resultado.

Los economistas cometen un error distinto cuandio atribuyen la aversión al riesgo al hecho de que apostar sea desagradable. La teoría de Von Neumann sólo tiene sentido cuando los jugadores son completamente neutrales hacia el hecho concreto de apostar. Como un pastor presbiteriano que asegura su casa, no apuestan porque les guste apostar, sino que lo hacen simplemente porque a su juicio las probabilidades están a su favor.

La vida no es un juego de suma cero

Al utilizar un termómetro como los que empleamos para medir la temperatura, somos libres de elegir el 0 y la unidad de la escala de utilidad de Alice como queramos. Podríamos, por ejemplo, haber asignado 32 útiles al peor resultado posible y 212 al mejor. El número de útiles que vale la cita con Bob en esta escala se descubre del mismo modo que el que se emplea para convertir los grados Celsius en grados Farenheit. Así que la cita con Bob que valía 75 útiles en la vieja escala valdría 167 útiles en la nueva escala.

En los juegos básicos analizados hasta ahora, Alice y Bob sólo tenían que evaluar los resultados GANAR y PERDER. Somos libres de asignar a estos sucesos el número de útiles que queramos, siempre que les asignemos más útiles a ganar que a perder. Si asignamos un punto positivo a ganar y un punto negativo a perder, obtenemos las tablas de pagos de la Figura 3.

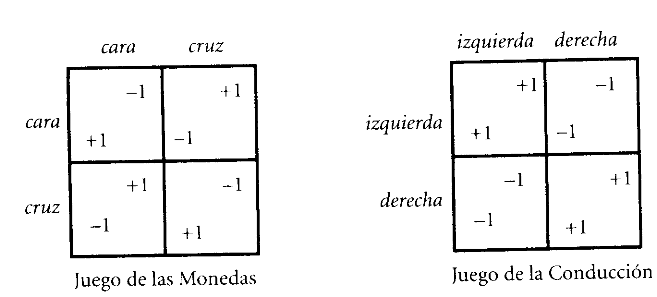
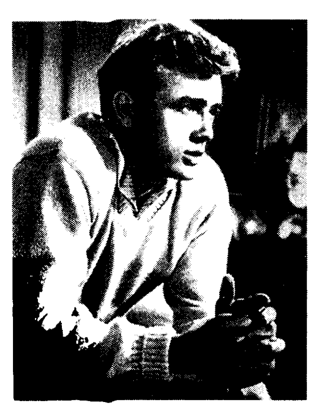


FIGURA 3. Pagos numéricos.

Los pagos de cada celda del Juego de las Monedas de la Figura 3 siempre suman cero, y como se pueden arreglar siempre las cosas para hacer que esto ocurra en un juego de conflicto puro, se dice que estos juegos son de *suma cero*. Cuando los gurús nos dicen que la vida no es un juego de suma cero, no se están refiriendo a la suma total de felicidad en el mundo; tan sólo nos recuerdan que los juegos en los que participamos en la vida real raramente son juegos de conflicto puro.

El equilibrio de Nash

La vieja película *Rebelde sin causa* sigue emitiéndose porque en ella actúa un inolvidable James Dean haciendo de atractivo rebelde adolescente. El Juego del Gallina se inventó para homenajear una escena en la cual él y otro chico conducen sus coches hacia el borde de un precipicio y demostrar quién se acobarda antes. Bertrand Russell es bien conocido por haber empleado el episodio como metáfora de la Guerra Fría.



[illegible] 1. James Dean.

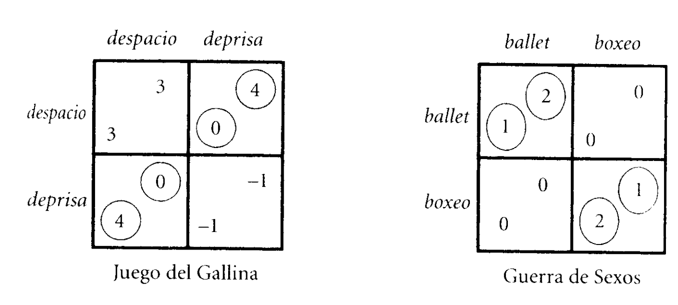


FIGURA 5. Juegos con motivaciones mixtas.

Prefiero ilustrar el Juego del Gallina con una historia más rutinaria en la que Alice y Bob son dos conductores de mediana edad aproximándose el uno al otro por una calle demasiado estrecha como para que ambos pasen con seguridad sin que uno de los dos aminore la marcha. Por lo tanto, las estrategias de la Figura 5 se definen como *despacio* y *deprisa*.

La nueva configuración rebaja el elemento competitivo de la historia original. El del Gallina se diferencia de otros juegos de suma cero como el de las Monedas en que los jugadores también tienen un interés común en evitar un desastre mutuo.

Los estereotipos que contiene la Guerra de Sexos son anteriores al movimiento de liberación de la mujer. Alice y Bob son una pareja de recién casados de luna de miel en Nueva York. En el desayuno, discuten si ir a un combate de boxeo o al ballet por la tarde, pero no son capaces de tomar una decisión. Más tarde se pierden cada uno por su lado entre la

multitud y cada uno tiene que decidir independientemente adónde ir por la tarde.

La historia que ilustra la Guerra de Sexos pone el énfasis en los aspectos cooperativos de su problema, pero también existe un elemento de conflicto del que carece el Juego de la Conducción, ya que cada jugador prefiere que se coordinen en un resultado distinto. Alice prefiere el ballet, y Bob, el combate de boxeo.

John Nash

Todo el mundo ha oído hablar de John Nash desde que su vida llegó a las pantallas en la película *Una mente maravillosa*. Como documenta la película, los altibajos de su vida no tienen mucho que ver con el abanico de experiencias de la mayoría de seres humanos. Todavía no se había graduado cuando inició la teoría moderna de la negociación racional. Su tesis doctoral formuló el concepto del «equilibrio de Nash», que en la actualidad es considerado la pieza clave y fundamental de la teoría de juegos. Emprendió la solución de problemas de matemáticas puras de primer orden empleando métodos tan originales que le valieron una sólida reputación de genio matemático de máximo nivel. Sin embargo, cayó víctima de un tipo de esquizofrenia que destruyó su carrera y le dejó languideciendo en la oscuridad durante más de cuarenta años, siendo objeto de burlas oca-

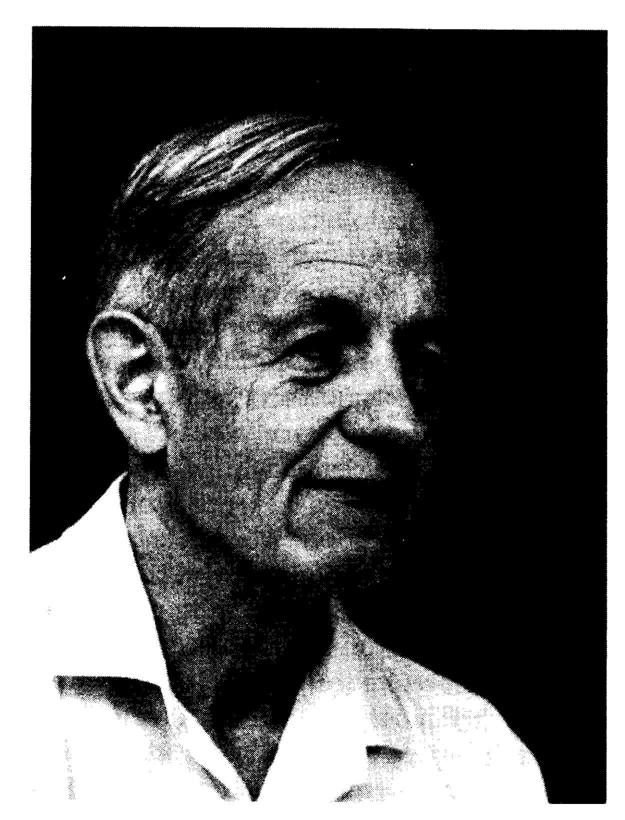


FIGURA 6. John Nash.

sionales en el campus de Princeton. Mirando atrás, su recuperación a tiempo para recibir el Premio Nobel en 1994 parece casi milagrosa. Pero, como comenta el propio Nash, sin su «locura» quizás sólo habría sido uno más entre los miles de seres anóni-

mos que han vivido y muerto en este planeta sin dejar tras de sí ninguna huella de su existencia.

No obstante, no hay que ser un genio caprichoso para entender la idea del equilibrio de Nash. Hemos observado que en un juego los pagos se establecen para convertir en tautología el hecho de que los jugadores racionales busquen maximizar sus pagos medios. Eso sería fácil si los jugadores supiesen las estrategias que sus oponentes fueran a elegir. Por ejemplo, si Alice supiera que Bob va a elegir *ballet* en la Guerra de Sexos, maximizaría sus pagos eligiendo también *ballet*. Es decir, *ballet* constituye la mejor respuesta de Alice a la elección de *ballet* por parte de Bob, un hecho indicado en la Figura 5 con un círculo alrededor de los pagos de Alice en la celda resultante de que ambos jugadores escojan *ballet*.

El «equilibrio de Nash» no es otra cosa que una pareja de estrategias cuyo resultado es una celda en la que *ambos* resultados están rodeados por un círculo. En términos más generales, el equilibrio de Nash tiene lugar cuando todos los jugadores eligen a la vez la mejor respuesta a las elecciones estratégicas de los demás.

Por lo tanto, en la Guerra de Sexos, tanto (*boxeo, boxeo*) como (*ballet, ballet*) son equilibrios de Nash. De un modo similar, (*despacio, deprisa*) y (*deprisa, despacio*) son equilibrios de Nash en el Juego del Gallina.

¿Por qué habría que preocuparse por los equilibrios de Nash? Hay dos razones principales para

ello. La primera supone que idealmente los jugadores racionales razonan para llegar a una solución del juego. La segunda supone que la gente llega a la solución del juego mediante un proceso evolutivo de ensayo y error. Gran parte de la capacidad predictiva de la teoría de juegos radica en la posibilidad de discurrir entre estas explicaciones alternativas. Pocas veces sabemos mucho sobre los detalles de los procesos evolutivos, pero en ocasiones podemos dar un salto adelante para predecir dónde acabarán preguntándonos qué harían unos jugadores racionales en la situación analizada.

Interpretación racional

Supongamos que alguien todavía más listo que Nash o Von Neumann hubiera escrito un libro que presentara una relación de todos los juegos posibles junto a una recomendación autorizada sobre cómo deberían comportarse en el juego los jugadores racionales. Un libro de teoría de juegos tan maravilloso necesariamente seleccionaría un equilibrio de Nash como solución para todos los juegos. Además, sería racional para al menos un jugador desoír los consejos del libro, que por consiguiente dejaría de tener autoridad.

Supóngase, por ejemplo, que el libro recomendara que los dos adolescentes que juegan al Gallina eligieran *despacio,* como sus madres desearían. Si el li-

bro tuviera ese carácter de autoridad, cada jugador sabría entonces que el otro jugará *despacio*. Pero un jugador racional del Gallina que sabe que su oponente va a elegir *despacio*, necesariamente elegirá *deprisa;* con lo que refutaría el presunto carácter de autoridad del libro.

Nótese que el razonamiento en esta defensa de los equilibrios de Nash es circular. ¿Por qué juega Alice de esta manera? Porque Bob juega de ese modo. ¿Por qué juega Bob de ese modo? Porque Alice juega de esta manera.

Se puede recurrir a varias expresiones latinas para aquellos que no estén satisfechos con argumentos circulares como éstos. La primera vez que se me acusó de cometer la falacia del *circulus in probando* al hablar de equilibrios tuve que buscar su significado. Resulta que tuve suerte de no ser acusado de la aún más deshonrosa *petitio principii*. Pero obviamente todos los argumentos deben ser circulares o reducirse a una regresión infinita si uno nunca deja de preguntar *por qué*. Las definiciones de los diccionarios son el ejemplo más conocido.

En los juegos, o bien podemos contemplar por siempre la infinita regresión que empieza con: «Alice piensa que Bob piensa que Alice piensa que Bob piensa...», o refugiarnos en la circularidad integrada en la idea de un equilibrio de Nash. Ello interrumpe la regresión infinita al observar que cualquier otro perfil estratégico acabará por desestabilizarse cuando los jugadores empiecen a pensar sobre lo que es-

tán pensando los demás jugadores. O, dicho de otra forma, para que las creencias de los jugadores sobre los planes de los demás sean coherentes, deben estar en equilibrio.

Interpretación evolutiva

La interpretación racional del equilibrio de Nash tuvo tanto éxito entre los pioneros de la teoría de juegos que la interpretación evolutiva casi se olvidó por completo. ¡Incluso los editores de la revista que publicó el artículo de Nash sobre los equilibrios rechazaron sus comentarios sobre el tema por carecer de interés! Pero la teoría de juegos jamás sería capaz de predecir el comportamiento de la gente corriente si la interpretación evolutiva no tuviera validez. Por ejemplo, el famoso matemático Émile Borel reflexionó sobre la teoría de juegos antes que Von Neumann, y llegó a la conclusión de que el teorema minimax probablemente fuera falso. De modo que si ni siquiera alguien tan inteligente como Borel no era capaz de encontrar una solución para juegos de la clase más simple, ¿qué esperanza nos podría quedar?

Existen muchas posibles interpretaciones evolutivas de los equilibrios de Nash que difieren en los procesos de ajuste mediante los cuales los jugadores pueden encontrar la forma de alcanzar un equilibrio. En los procesos de ajuste simples, los pagos del

juego se identifican con el nivel de aptitud de los jugadores. Los procesos que favorecen estrategias más aptas en perjuicio de sus hermanos menos exitosos sólo pueden dejar de funcionar cuando conseguimos un equilibrio de Nash, porque únicamente entonces todas las estrategias supervivientes serán tan aptas como sea posible en esas circunstancias. Por consiguiente, no es necesario que nuestros jugadores sean fenómenos de la matemática para que los equilibrios de Nash sean relevantes. A menudo predicen bastante bien el comportamiento de animales. Tampoco es que la relevancia evolutiva de los equilibrios de Nash esté confinada a la biología. Tienen un papel predictivo siempre que un proceso de ajuste tienda a eliminar las estrategias que generan pagos bajos.

Pongamos un ejemplo: los agentes de bolsa que consiguen menos beneficios que sus competidores se van a la quiebra. Las reglas generales empleadas por los agentes bursátiles se encuentran por lo tanto sujetas al mismo tipo de presiones evolutivas que las que tienen los genes de los peces o de los insectos. Por consiguiente, sí tiene sentido examinar los equilibrios de Nash en juegos protagonizados por agentes de bolsa, aunque todos sabemos que algunos de ellos no serían capaces de orientarse en una pecera de peces dorados, por no decir en un libro de teoría de juegos.

El Dilema del Prisionero

El juego básico más famoso de todos es el Dilema del Prisionero. En la historia tradicional que se emplea para motivar el juego, Alice y Bob son dos gángsters en el Chicago de los años veinte. El fiscal del distrito sabe que son culpables de un crimen importante, pero es incapaz de encarcelarlos a menos que uno de ellos confiese. Ordena su detención y les ofrece por separado el acuerdo siguiente:

Si confiesas y tu cómplice no confiesa, sales en libertad.

Si tú no confiesas pero tu cómplice confiesa, te sentenciarán a ir a la cárcel con la condena más larga.

Si los dos confesáis, ambos seréis encarcelados, pero no se aplicará la condena más larga.

Si ninguno de los dos confiesa, ambos seréis incriminados con cargos de evasión fiscal con los que la pena de prisión está asegurada.

La historia se hace más interesante si Alice y Bob han acordado mantener la boca cerrada en caso de que en algún momento los pongan en esa tesitura. Por lo tanto, aguantar se corresponde con la cooperación y confesar con la defección, como en la tabla de la izquierda de la Figura 7. Los pagos de la tabla se corresponden con años de cárcel orientativos (bajo el supuesto de que un útil siempre equivalga a un año extra de libertad).

Una historia menos barroca asume que tanto Alice como Bob tienen acceso a un bote con dinero.

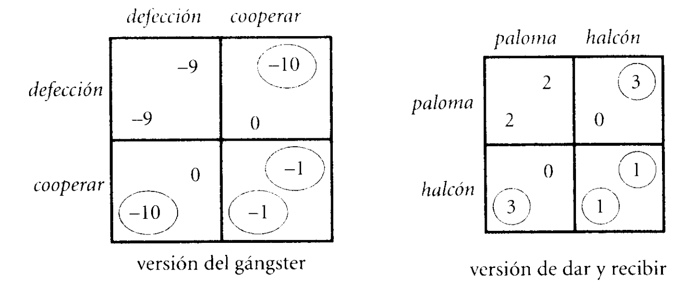


FIGURA 7. Dos versiones del Dilema del Prisionero; en la versión de la derecha, *paloma* representa dar y *halcón* recibir.

Ambos gozan de independencia para dar a su oponente 2 dólares del bote o meterse 1 dólar del bote en su propio bolsillo. El supuesto de que a Alice y Bob solamente les importara el dinero nos lleva a la tabla de pagos de la derecha de la Figura 7, donde los útiles se han identificado con dólares. En este caso, la estrategia altruista de dar 2 dólares se ha denominado *paloma*, y la de tomar 1 dólar ha adoptado la etiqueta *halcón*.

Los círculos alrededor de las mejores elecciones revelan que el único equilibrio de Nash de la versión de «dar o tomar» del Dilema del Prisionero consiste en que tanto Alice como Bob se decidan por la estrategia *halcón*, aunque cada uno obtendría más si ambos se inclinaran por *paloma*. La versión con gángsters es estratégicamente idéntica. En el único equilibrio de Nash, los dos optan por la defección, con el resultado de que ambos pasan una

larga temporada en la cárcel, aunque cada uno recibiría una sentencia mucho más benévola si ambos cooperaran.

¿La paradoja de la racionalidad?

Una generación entera de académicos se tragó el anzuelo de que el Dilema del Prisionero representa la esencia del problema de la cooperación entre humanos. Por consiguiente, se asignaron la tarea irrealizable de explicar las razones por las cuales la resolución en la teoría de juegos de la supuesta «paradoja de la racionalidad» es errónea (véase «Falacias del Dilema del Prisionero», Capítulo 10). Pero los expertos en teoría de juegos consideran que es totalmente falso que el Dilema del Prisionero capte lo fundamental de la cooperación humana. Por el contrario, representa una situación en la que los dados están tan cargados contra el surgimiento de la cooperación como fuera posible.

Si resultara adecuado modelizar el gran juego de la vida al que juega la especie humana a través del Dilema del Prisionero, ¡no habríamos evolucionado como animales sociales! Por lo tanto, ya no vemos más necesidad en solucionar la paradoja inventada de la racionalidad que en explicar por qué la gente se ahogaba cuando la echaban al lago Michigan con los pies metidos en un bloque de cemento. La paradoja de la racionalidad no existe. Los jugadores raciona-

les no cooperan en el Dilema del Prisionero porque las condiciones necesarias para una cooperación racional están ausentes.

Afortunadamente, la fase de la paradoja de la racionalidad en la historia de la teoría de juegos ya está casi acabada. En la medida en que son recordadas, las numerosas falacias que se inventaron en un intento desesperado por mostrar que es racional cooperar en un Dilema del Prisionero se citan mayoritariamente como ejemplos divertidos de lo que los psicólogos llaman «razonamiento mágico», en el cual la lógica se manipula para asegurarse el resultado esperado. Mi ejemplo favorito es la afirmación de Immanuel Kant de que la racionalidad exige obedecer a su imperativo categórico. En el Dilema del Prisionero, los jugadores racionales siempre elegirían *paloma*, porque sería la mejor estrategia si todo el mundo la eligiera.

Dominación

La idea de que necesariamente es irracional hacer cosas que serían malas si todo el mundo las hiciera goza de mucho predicamento. Probablemente tu madre estaba tan orgullosa de este argumento como la mía. Por lo tanto, vale la pena reiterar la siguiente refutación radical en el caso del Dilema del Prisionero.

Para no dar nada por sentado, empezaremos por preguntar de dónde vienen los pagos que represen-

tan las preferencias de los jugadores en el Dilema del Prisionero. La teoría de las preferencias reveladas nos indica que encontraremos la respuesta mediante la observación de las decisiones que toman (o tomarían) Alice y Bob cuando solucionan problemas de decisión individuales.

Por lo tanto, asignarle un pago mayor a Alice en la esquina inferior izquierda de la tabla de pagos del Dilema del Prisionero que en la celda superior izquierda significa que Alice elegiría *halcón* en el problema de decisión individual al que se enfrentaría si supiera de antemano que Bob ha elegido *paloma*. Análogamente, asignar un pago mayor en la celda inferior derecha representa que Alice elegiría *halcón* cuando se enfrentara a un problema de decisión individual en el que supiera de antemano que Bob ha elegido *halcón*.

Por consiguiente, la propia definición del juego establece que *halcón* es la mejor respuesta de Alice cuando la elección de Bob es *paloma* y también cuando sabe que Bob elige *halcón*, de modo que no necesita saber nada sobre lo que Bob ha elegido en realidad para saber cuál es la mejor respuesta. Para ella resulta racional adoptar la estrategia *halcón* sea cual sea la estrategia que él piensa elegir. En estas inusuales circunstancias, decimos que la estrategia *halcón* es dominante respecto a las estrategias alternativas de Alice.

¿Objeciones?

Es común que se hagan dos objeciones al análisis precedente. La primera niega que Alice fuera a elegir la defección en la versión gangsteriana del Dilema del Prisionero si supiera que Bob ha elegido cooperar. Se proponen varias razones para ello, que dependen de lo que se crea sobre las condiciones en el Chicago de Al Capone, pero dichas objeciones no dan en el clavo. Si Alice no le traicionara si supiera que Bob ha decidido cooperar, no estaría jugando al Dilema del Prisionero. Aquí o en cualquier otra parte, es importante no tomarse demasiado en serio las historias que motivan los juegos. Lo que define el Dilema del Prisionero es la tabla de pagos de la Figura 7, no las historias banales que lo acompañan.

La segunda objeción siempre me intriga. Se dice que apelar a la teoría de las preferencias reveladas reduce a una tautología la afirmación de que en el Dilema del Prisionero la defección es racional. Dado que las tautologías carecen de contenido sustantivo, ¡puede ignorarse la afirmación! Pero ¿alguien diría lo mismo de $2 + 2 = 4$?

Experimentos

Una respuesta alternativa consiste en argumentar que no importa qué es racional en el Dilema del Prisionero, ya que los experimentos de laboratorio

muestran que en la realidad los individuos eligen *paloma*. Los pagos de dichos experimentos no suelen determinarse mediante el empleo de la teoría de las preferencias reveladas. Casi siempre consisten sólo en dinero, pero, no obstante, los resultados pueden ser muy instructivos.

Los sujetos no experimentados cooperan algo más de la mitad del tiempo de PROMEDIO, pero es abrumadora la evidencia de que en juegos como el Dilema del Prisionero la tasa de defecciones aumenta progresivamente a medida que los sujetos adquieren experiencia, hasta el punto que sólo cerca de un 10% de los sujetos sigue cooperando después de diez rondas aproximadamente.

También se mencionan las simulaciones por ordenador, que supuestamente muestran que la evolución al final generará cooperación en el Dilema del Prisionero, pero estos detractores a menudo han confundido el Dilema del Prisionero con su primo repetido indefinidamente, en el cual la cooperación es realmente un equilibrio de Nash (véase «Toma y daca», Capítulo 5).

2. La suerte

El análisis de Conan Doyle de su versión del Juego de las Monedas en *El problema final* le hace un flaco favor a la supuesta maestría intelectual de su héroe. Edgar Allan Poe lo hace mejor en *La carta robada*, en la que el villano ha robado una carta y el problema es dónde buscarla.

Poe sostiene que la forma de ganar consiste en extender cadenas de razonamiento del tipo «él piensa que yo pienso que él piensa que yo pienso...» un paso más allá que tu oponente. En defensa de la proposición, inventa un chico que gana continuamente en el Juego de las Monedas al imitar la expresión facial de su oponente y, supuestamente, aprender de este modo qué debe de estar pensando. Hay que admitir que es impresionante el número de jugadores de Póquer que pierden sus manos por su incapacidad para controlar su lenguaje corporal, pero *tanto* Alice *como* Bob pueden emplear el truco de Poe con

éxito, aunque ninguno de los dos aprenda a poner cara de póquer.

La teoría de juegos va más allá de la aparentemente infinita regresión a la que Alice y Bob se enfrentan al apelar a la idea del equilibrio de Nash. Pero seguimos con un problema, porque el truco de rodear con un círculo las mejores respuestas no funciona con el Juego de las Monedas. Después de rodear con círculos todos los pagos de la Figura 3 que son la mejor respuesta posible, acabamos con dos equilibrios de Nash en el Juego de la Conducción, pero ninguno en el Juego de las Monedas.

Este hecho puede parecer misterioso a aquellos que recuerdan que John Nash consiguió su Premio Nobel en parte por demostrar que todos los juegos finitos tienen al menos un equilibrio. La respuesta a este misterio es que tenemos que mirar más allá de las estrategias puras que hemos analizado hasta ahora y considerar también estrategias mixtas.

¿Tiene sentido hacer aleatorias las decisiones?

Una estrategia mixta requiere que los jugadores hagan aleatoria su elección de una estrategia pura. Es natural objetar que sólo los locos toman decisiones importantes de manera aleatoria, pero las estrategias mixtas se usan constantemente sin que nadie se dé cuenta.

Mi ejemplo favorito surgió cuando estaba asesorando a una empresa turística sobre un asunto legal. La teoría de juegos predice que una empresa como ésta empleará una estrategia mixta en el juego de fijar los precios cuando la demanda de vacaciones se muestra inesperadamente baja. No obstante, cuando le pregunté a un alto ejecutivo si su empresa estableció sus precios de forma aleatoria el año anterior, reaccionó con horror a una insinuación tan fuera de lugar. En ese caso, ¿por qué eran sus precios para similares vacaciones tan distintos? Su respuesta fue instructiva: «Tienes que mantener a la competencia en suspense intentando adivinarlos».

Su respuesta demuestra que entendía perfectamente *por qué* la teoría de juegos a veces recomienda el uso de estrategias mixtas. Lo que no quería reconocer es que el método de su empresa para establecer los precios consistía esencialmente en un mecanismo de decisiones aleatorias. Nadie cortó la baraja. Nadie agitó los dados en el cubilete. Pero desde el punto de vista de un rival que intentara predecir lo que su empresa cobraría por dos semanas en las Bahamas, bien podrían haberlo decidido de ese modo.

Equilibrios de Nash mixtos

El uso de estrategias mixtas en el Juego de las Monedas, en el que mantener al oponente tratando de adivinar lo es todo, no es sorprendente en absoluto.

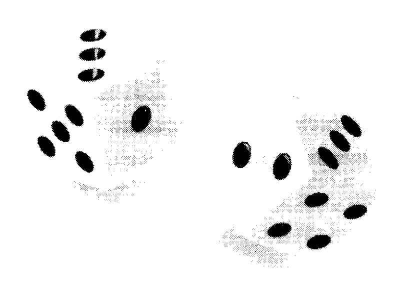


FIGURA 8. Tirada de dados.

Como todos los niños saben, la solución consiste en hacerlo aleatorio entre *cara* y *cruz*. Si ambos jugadores emplean esta estrategia mixta, el resultado es un equilibrio de Nash. Cada jugador gana la mitad de las veces, que es lo mejor que ambos pueden conseguir dada la elección estratégica del otro.

De un modo similar, hay un equilibrio de Nash en el Juego de la Conducción si ambos jugadores eligen *izquierda* y *derecha* con la misma probabilidad, por lo que tiene tres equilibrios de Nash, dos puros y uno mixto. Puede decirse lo mismo tanto en el Juego del Gallina como en la Guerra de Sexos, pero el equilibrio de Nash mixto de la Guerra de Sexos requiere algo más que limitarse a considerar igual de probables las dos estrategias puras.

En la Guerra de Sexos, a Bob le gusta el boxeo el doble que el ballet, de modo que Alice tiene que decidirse por la estrategia de *boxeo* la mitad de veces que por el *ballet* para asegurarse la misma media de

pagos que con sus dos estrategias puras. Dado que en ese caso a Bob no le importa cuál de sus dos estrategias puras jugar, las dos son igual de buenas, incluida la estrategia mixta que le da la misma probabilidad al *ballet* que al *boxeo*. Pero el uso de esta estrategia mixta hace a Alice indiferente ante sus dos estrategias puras. Así que todas las estrategias de ella son igual de buenas, incluida la estrategia mixta que hace que el *boxeo* sea el doble de probable que el *ballet*. Este cierre del círculo muestra que hemos encontrado un equilibrio de Nash mixto en el cual tanto Alice como Bob se deciden por su estrategia favorita dos tercios del tiempo.

Hacer indiferente al otro

Los jugadores racionales nunca hacen aleatoria la elección entre dos estrategias puras a menos que sean indiferentes ante ellas. Si una estrategia fuera mejor, la estrategia inferior nunca se jugaría. ¿Qué puede hacerte indiferente ante dos estrategias? En la Guerra de Sexos, la razón se encuentra en la creencia de que tu oponente va a emprender una estrategia mixta que iguala los pagos medios que se derivan de cada una de tus estrategias. Esta característica del equilibrio de Nash mixto lleva en ocasiones a resultados que parecen paradójicos a primera vista.

En el Juego del Buen Samaritano participa toda una población de jugadores idénticos, todos los cua-

les quieren que alguien responda a su llamada de auxilio. Cada jugador consigue diez útiles si alguien responde y nada si nadie responde. La pega es que ayudar es una molestia, de modo que todos los jugadores que ofrecen su ayuda deben sustraer un útil de sus pagos.

Si nadie más piensa ayudar, lo mejor que puede hacerse es quedarse la ayuda para uno mismo. Si todos los demás piensan ayudar, se maximizan los pagos si no se hace nada. Por lo tanto, el único equilibrio de Nash posible en el que todos usan la misma estrategia de un modo independiente es necesariamente mixto. En un equilibrio de Nash mixto como éste, es necesario que haya precisamente una posibilidad entre diez de que nadie más ofrezca su ayuda, porque ésa es la frecuencia que te hace indiferente entre ayudar y no ayudar.

La probabilidad real de que se ofrezca ayuda en equilibrio es algo más alta, porque hay una cierta probabilidad de que te ofrezcas para ayudarte a ti mismo. No obstante, la probabilidad de que cualquier jugador ofrezca ayuda en equilibrio debe ser menor a medida que la población crece, porque la probabilidad de que nadie más ayude debe ser igual a 1/10. De modo que, a mayor población, menor es la probabilidad de que alguien ayude. Con sólo dos jugadores, cada uno ayuda con una probabilidad de 9/10 y la petición de ayuda únicamente se pasa por alto una vez de cada cien. Con un millón de jugadores, cada uno tiene una probabilidad de ayudar tan

pequeña que cerca de una vez de cada diez nadie en absoluto responde a la petición de ayuda.

Las consecuencias pueden ser aterradoras, como ilustra un conocido caso en Nueva York. Una noche, una mujer fue atacada de manera prolongada, y al final acabó asesinada en la calle. Mucha gente la oyó pedir auxilio a gritos, pero nadie llegó a llamar a la policía. ¿Deberíamos estar de acuerdo con lo que dicen los periódicos y deducir que la vida en la ciudad nos convierte a todos en monstruos? Quizás es verdad, pero el Juego del Buen Samaritano indica que incluso la gente de ciudades pequeñas podría comportarse de la misma forma si se encontrara en la misma situación.

El voto tiene un carácter similar. Por tomar un caso extremo, supongamos que Alice y Bob son los únicos candidatos a la presidencia. Es bien sabido que Bob es un caso perdido; sólo su madre cree que sería el mejor presidente. Ella tiene claro que votará, pero ¿por qué deberían preocuparse los demás? Como en el Juego del Buen Samaritano, añadir más votantes sólo empeora las cosas. En una situación de equilibrio, Bob saldrá elegido con una probabilidad irreductible aunque haya un millón de votantes.

Los juegos de voto de este tipo no son más que modelos de referencia. En la realidad, la gente apenas piensa en términos racionales sobre si votar o no. Aunque lo hicieran, podrían llegar a la conclusión de que acudir al colegio electoral es un placer en lugar de una tortura. Sin embargo, el modelo mues-

tra que los expertos que acusan de irracional a la gran minoría de personas que no votan en las elecciones presidenciales están diciendo una tontería. Si queremos hacer que la gente vote, debemos tender hacia un sistema más descentralizado en el que cada voto cuente realmente lo suficiente como para compensar la falta de entusiasmo hacia el voto que mucha gente obviamente tiene. Si no podemos persuadir a cada persona de que le guste votar y no podemos cambiar nuestro sistema político, simplemente tendremos que acostumbrarnos a que se queden en casa en la jornada electoral. La simple repetición de la consigna «cada voto cuenta» nunca funcionará, porque no es cierta.

Alcanzar un equilibrio

¿Cómo encuentra la gente el camino hasta el equilibrio de Nash? Esta pregunta resulta especialmente apremiante en el caso de los equilibrios mixtos. ¿Por qué debería Alice adaptar su estrategia para hacer que Bob se muestre indiferente ante algunas de sus estrategias?

Los estudios sobre deporte demuestran que los atletas a veces se comportan de un modo muy similar a las predicciones de la teoría de juegos. Un ejemplo se encuentra en los penaltis del fútbol. ¿Hacia dónde habría que dirigir el balón? ¿Cómo tendría que saltar el portero? El tenis es otro ejemplo. ¿Ten-

dría que hacer un *smash* o un globo? Parece improbable que los entrenadores lean libros de teoría de juegos, así que, ¿cómo pueden saber la frecuencia idónea con la que elegir cada opción? Presumiblemente, lo aprenden por ensayo y error.

Nadie entiende todas las distintas maneras por las que la gente real aprende nuevas formas de hacer las cosas, pero tenemos algunos modelos básicos que captan parte de lo que tiene que estar pasando. Incluso el inocente modelo siguiente funciona sorprendentemente bien.

Alice y Bob son robots que juegan al mismo juego repetidamente. En cada repetición, Alice es programada para dar su mejor respuesta a una estrategia mixta en la que cada una de las estrategias puras de Bob es elegida con la misma frecuencia con la que éste las ha empleado en el pasado. Bob tiene el mismo programa, de modo que ni él ni Alice son completamente racionales, porque en ocasiones ambos podrían mejorar sus pagos si fueran programados con mayor inteligencia. Los expertos en teoría de juegos dicen que solamente tienen una racionalidad limitada.

Con el paso del tiempo, las frecuencias con las que los robots han jugado su segunda estrategia evolucionan como muestra la Figura 9 (que se ha simplificado pasando de un tiempo discreto a continuo). Por ejemplo, la mejor respuesta de Alice en el Juego de las Monedas es *cruz* cuando la frecuencia actual con la que Bob ha elegido *cruz* pasa de la mitad. De este modo, la frecuencia de *cruz* de Alice crecerá has-

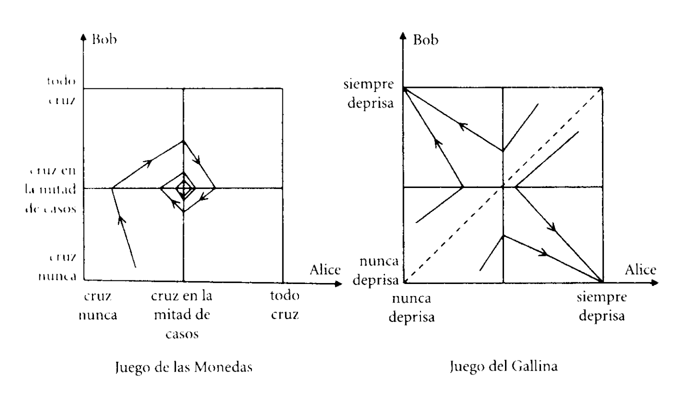


FIGURA 9. Aprender a jugar en equilibrio.

ta que la frecuencia de *cruz* de Bob caiga por debajo de la mitad, momento a partir del cual empezará a bajar bruscamente.

Seguir las flechas de la Figura 9 siempre lleva a un equilibrio de Nash. No importa cómo inicialicemos a los robots: alguien que cuente con qué frecuencia eligen sus estrategias puras al final difícilmente podrá distinguir uno de nuestros robots de racionalidad limitada de un jugador perfectamente racional.

En el caso del Juego de las Monedas, que está más cerca del tenis o el fútbol, las frecuencias con las que se elige *cara* o *cruz* siempre convergen en sus valores de equilibrio de 1/2. En los experimentos de laboratorio con sujetos humanos, el patrón general es en gran medida el mismo, aunque las frecuencias no evolucionan de un modo tan regular y empiezan a oscilar cuando se acercan lo suficiente al equilibrio

mixto, ya que los jugadores son casi indiferentes entre las estrategias disponibles.

La situación en el Juego del Gallina es más complicada. Cada equilibrio puro tiene una cuenca de atracción. Si inicializamos nuestros robots para que empiecen en la cuenca de atracción de un equilibrio determinado, acabarán convergiendo en ese equilibrio. La cuenca de equilibrio de (*despacio, deprisa*) se encuentra por encima de la diagonal en la Figura 9. La cuenca de equilibrio de (*deprisa, despacio*) se encuentra por debajo de la diagonal. La cuenca de equilibrio del equilibrio mixto no es otra que la propia diagonal.

Es fácil diseñar juegos en los que el comportamiento de robots como Alice y Bob diera vueltas infinitamente sin establecerse nunca un equilibrio, pero los seres humanos son capaces de aprender de maneras más sofisticadas que Alice y Bob. En concreto, cuando aprendemos cómo comportarnos al enfrentarnos con un nuevo juego, por lo general ya poseemos un alto nivel de comentarios y sugerencias sobre cuál ha de ser nuestro comportamiento.

Por ejemplo, los agentes de bolsa novatos aprenden el oficio de sus colegas más experimentados. Los científicos jóvenes analizan detenidamente la historia de los laureados con el Nobel con la esperanza de hallar el secreto de su éxito. Los novelistas reciclan tediosamente las tramas de los últimos *best sellers*. Los compradores se cuentan los unos a los otros dónde encontrar las mejores ofertas. Los mo-

delos básicos para dicho aprendizaje social o de imitación convergen de un modo más rápido y fiable en equilibrios de Nash que los modelos en los que los individuos aprenden en solitario por ensayo y error.

La teoría evolutiva de los juegos consiste en el estudio de dichos modelos dinámicos. Su aplicación a la biología evolutiva es tan importante que le dedicamos todo un capítulo (Capítulo 8).

Teorema minimax

Cuando un bisoño John Nash llamó a la oficina de Von Neumann para contarle su demostración de que todos los juegos finitos tienen al menos un equilibrio de Nash si se permiten estrategias mixtas, Von Neumann se mostró desdeñoso. ¿Por qué no recibió la contribución de Nash con los brazos abiertos?

Es cierto que el método que Nash empleó para probar su teoría no era nuevo para Von Neumann, que había sido pionero del mismo método. También es cierto que el enfoque de Nash probablemente adolecía de falta de tacto, dado que se estaba haciendo famoso por llamar a Albert Einstein, más o menos, para explicarle cómo hacer física. Pero Von Neumann no tenía nada que temer de un descarado joven estudiante de doctorado que se ejercitaba en su dominio. Creo que existía una razón más importante para la falta de interés de Von Neumann.

Da la impresión de que Von Neumann nunca reflexionó mucho sobre la interpretación evolutiva de la teoría de juegos. Creía que el propósito de estudiar un juego debería consistir en identificar una solución racional clara y definida. La idea del equilibrio de Nash no cumple los requisitos, pues la mayoría de juegos tienen muchos equilibrios de Nash y a menudo no hay una razón puramente racional para seleccionar un equilibrio en lugar de otro. Como Von Neumann destacó posteriormente, el criterio de la mejor respuesta posible sólo nos dice que algunos perfiles estratégicos *no pueden* ser la solución racional de un juego, pero queremos saber qué perfiles estratégicos *pueden* considerarse soluciones.

Minimax y maximin

Presumiblemente, Von Neumann limitó su atención a juegos de suma cero con dos jugadores porque son una de las pocas clases de juegos en los que puede realizarse su ideal de una única solución. Resulta desafortunado que su demostración de este hecho tuviera que llamarse teorema *minimax*, porque la solución racional de un juego de suma cero de dos jugadores realmente consiste en que cada jugador aplique el principio del *maximin*. Éste establece que hay que calcular el peor pago que podrías obtener de cada una de tus estrategias mixtas para entonces elegir aquella estrategia que maximizaría

tus pagos si el escenario siempre fuera el del peor caso posible.

Por ejemplo, lo peor que le podría pasar a Alice en el Juego de las Monedas es que Bob adivinara la estrategia mixta que ella fuera a aplicar. Si esta estrategia mixta consiste en que Alice elige *cara* más de la mitad de las veces, Bob elegirá *cruz* todo el rato. En ese caso, ella perderá la mayoría de las veces y sus pagos serán negativos. Si la estrategia mixta de Alice consiste en elegir *cruz* más de la mitad de las veces, Bob jugará *cara* todo el rato. Una vez más, ella perderá más de la mitad de las veces y sus pagos volverán a ser negativos. Por lo tanto, la estrategia maximin de Alice consiste en jugar *cara* y *cruz* con la misma frecuencia, lo que le garantiza unos pagos de exactamente cero.

Sólo un paranoico encontraría atractivo en general el principio maximin, ya que asume que el universo te ha elegido para convertirte en su enemigo personal. No obstante, si Alice juega con Bob en un juego de suma cero, éste es el universo relevante y, por lo tanto, en este caso concreto, el universo es realmente el enemigo personal de Alice.

¿Por qué maximin?

Irónicamente, el teorema de Von Neumann deriva inmediatamente de la demostración hecha por Nash de que todos los juegos finitos tienen al menos un equilibrio de Nash.

Para verlo, hay que empezar por localizar el equilibrio de Nash en un juego de suma cero de dos jugadores. Llamaremos *fila* a la estrategia de equilibrio de Alice y *columna* a la estrategia de equilibrio de Bob. Los pagos en equilibrio se llamarán *valor de Alice* y *valor de Bob*. Por ejemplo, en el Juego de las Monedas tanto *fila* como *columna* son estrategias mixtas en las cuales *cara* y *cruz* se juegan con la misma probabilidad. El *valor de Alice* y el *valor de Bob* son el pago de cero que cada jugador obtiene de media si juegan de este modo.

Alice no puede estar segura de conseguir más que el *valor de Alice* porque Bob siempre podría elegir *columna*, la mejor respuesta ante la cual es *fila*. Por otra parte, Alice puede estar segura de conseguir como mínimo el *valor de Alice* si juega *fila*, ya que lo mejor que Bob puede responder es *columna*, y lo mejor que Bob puede hacer por sí mismo coincide con lo peor que puede hacerle a Alice. De modo que el *valor de Alice* es el pago maximin de Alice, y *fila* conforma una de sus estrategias maximin.

Por el mismo razonamiento, el *valor de Bob* consiste en su pago maximin y *columna* es una de las estrategias maximin, dado que el *valor de Alice* y el *valor de Bob* suman cero, lo mismo que sus pagos maximin. Por consiguiente, ninguno de los jugadores puede conseguir más que su pago maximin a menos que el otro consiga menos. De modo que con el principio maximin no se puede conseguir un re-

sultado mejor en un juego de suma cero de dos jugadores contra un oponente racional.

La demostración de este hecho por parte de Von Neumann se denomina «teoría del minimax», porque afirmar que los pagos maximin de Alice y Bob suman cero equivale a decir que el pago maximin de Alice equivale a su pago máximo. Pero no puede cometerse el error común de pensar que, por lo tanto, Von Neumann recomendaba usar el principio minimax. ¡Nadie querría calcular el *mejor* pago medio que podría obtenerse de cada una de las estrategias mixtas disponibles para, a continuación, elegir cualquier estrategia que *minimizara* los pagos si el escenario siempre fuera el mejor posible!

Descubrir estrategias maximin

Desde un punto de vista retrospectivo, es una lástima que los matemáticos se interesaran inmediatamente en el teorema del minimax. El estudio de juegos de persecución y evasión en los cuales un piloto trata de evadirse de un misil detector de calor ciertamente constituye un interesante ejercicio de la teoría del control, pero por su naturaleza, dicho ejercicio refuerza los prejuicios de los críticos obsesionados con la idea de que los teóricos de los juegos son ciborgs locos. Tampoco es probable que la popularidad de la teoría de juegos se vea incrementada por el abstruso hallazgo de que el teorema del

minimax sólo puede ser cierto en determinados juegos infinitos si estamos dispuestos a negar el Axioma de la Elección. La teoría de juegos habría encontrado una mayor aceptación en sus primeros años si sus entusiastas no la hubieran hecho parecer tan difícil.

Piedra-papel-tijera

Todos los niños conocen este juego. Simultáneamente, Alice y Bob hacen un gesto con la mano que representa una de sus tres estrategias puras: *piedra, papel, tijera.* El ganador se determina de acuerdo con estas normas:

piedra	rompe	*tijera*
tijera	corta	*papel*
papel	envuelve	*piedra*

Si ambos jugadores hacen el mismo gesto, el resultado es empate; el juego es considerado por ambos jugadores como equivalente a una lotería en la que la probabilidad de ganar y la de perder son iguales, de modo que se trata de un juego de suma cero.

Es obvio que para cada jugador la estrategia racional consiste en emplear cada una de las estrategias puras con la misma frecuencia. Entonces cada uno se garantiza un pago maximin de cero. El principal interés del juego radica en que hay que trabajar

muy duro para encontrar un proceso evolutivo que converja hacia esta solución.

Por ejemplo, las dinámicas de la mejor respuesta posible que muestra la Figura 9 acaban formando ciclos de tal forma que periódicamente casi se elimina cada una de las estrategias cada vez. Uno puede despreciar este resultado como curiosidad si no fuera porque la mezcla de población de las tres variedades de salamandra centroamericana que juega a un juego como Piedra-papel-tijera también acaba discurriendo por ciclos similares, de modo que siempre hay una variedad que parece al borde de la extinción.

El Juego de Cartas de O'Neill

Barry O'Neill se sirvió de este juego en el primer experimento de laboratorio que halló evidencia positiva del principio del maximin. Los primeros experimentos habían resultado desalentadores; el eminente psicólogo William Estes fue especialmente mordaz cuando informó sobre su prueba de la teoría de Von Neumann: «La teoría de juegos no será un sustituto para una teoría del comportamiento de base empírica cuando queramos predecir lo que la gente realmente hará en situaciones competitivas».

No obstante, en el experimento en el que Estes basó sus desdeñosos comentarios sólo participaron

dos sujetos, que tenían experiencia en los experimentos de refuerzo del aprendizaje que Estes estaba empleando para defender la ya desacreditada teoría de la «igualación de probabilidades». Ninguno de los sujetos sabía que participaba en un juego con otra persona. Aunque hubieran sabido que jugaban a un juego, la teoría del minimax habría sido irrelevante para su delicada situación, ya que no se les explicó de antemano cuáles eran los pagos del juego. Por consiguiente, jugaban con información incompleta, situación en la que no se aplica la teoría del minimax de Von Neumann.

Al diseñar un experimento sin dichos errores, O'Neill quería establecer controles por si los jugadores podían plantear diferentes actitudes hacia el riesgo. Por ejemplo, Piedra-papel-tijera no sería de suma cero a menos que tanto Alice como Bob pensaran que empatar es equivalente a ganar o perder con la misma probabilidad. De modo que O'Neill experimentó con un juego con el que solamente se ganaba o perdía, pero que estaba lo suficientemente estructurado como para que la solución no fuera obvia.

Tanto Alice como Bob tienen el as y las figuras de uno de los palos de una baraja de cartas. Muestran simultáneamente una carta. Alice gana si los dos muestran un as o si las cartas no coinciden. En cualquier otro caso, gana Bob.

La estrategia maximin de Alice se alcanza preguntándose cuál de sus estrategias mixtas hace que Bob sea indiferente ante todas sus propias estrategias pu-

tas. La respuesta es que Alice debería sacar todas las figuras con la misma frecuencia y el as el doble de veces. Bob debería hacer lo mismo, con el resultado de que Alice ganaría dos quintas partes de las veces por tres quintas partes de Bob.

El Duelo

El Juego del Duelo es lo más cercano a una aplicación militar que vamos a analizar. Alice y Bob caminan el uno hacia el otro armados cada uno con una pistola cargada con una sola bala. La probabilidad de que uno acierte al disparar se incrementa a medida que se acercan. Los pagos de cada jugador consisten en su probabilidad de sobrevivir.

¿Cuánto debería acercarse Alice a Bob antes de disparar? Literalmente, es cuestión de vida o muerte, puesto que si dispara y falla, Bob podrá avanzar y disparar a bocajarro, con consecuencias fatales para Alice. Dado que alguien muere en cada posible resultado del juego, los pagos siempre suman uno.

La conclusión es obvia. No puede ser un equilibrio de Nash que un jugador planee disparar antes que el otro, porque sería una mejor respuesta para el jugador que planea disparar antes esperar un instante más. Pero ¿cuánto más se habrán acercado cuando abran fuego a la vez?

El teorema minimax ofrece una respuesta directa a esta pregunta. El Duelo es un juego de suma unita-

ria en lugar de suma cero, pero el teorema minimax también se aplica (si los pagos siguen sumando uno cuando los jugadores disparan a la vez). La única diferencia es que los pagos maximin de los jugadores ahora suman uno en lugar de cero. De modo que si Alice siempre tiene el doble de posibilidades de acertar el tiro que Bob, ambos dispararán a aquella distancia a la que la bala de Alice alcance a Bob dos tercios de las veces y la de Bob alcance a Alice un tercio de las veces.

3. Tiempo

Juegos con información perfecta

A veces la gente cree que es frívolo hablar sobre problemas sociales humanos como si fueran meros juegos de mesa. La ventaja radica en que casi todo el mundo es capaz de pensar desapasionadamente en las cuestiones estratégicas que surgen de juegos como el Ajedrez o el Póquer, sin rechazar automáticamente una conclusión si no resulta bienvenida. Pero la lógica es la misma se aplique donde se aplique.

Juegos de mesa

A primera vista, no parece que el Ajedrez o el Póquer[1] puedan representarse en tablas de pagos, por-

1. Al igual que en el original, cuando un juego, ya se trate del ajedrez o del dilema del prisionero, se analiza en su dimensión

que el tiempo entra en escena. No solamente importa quién hace qué; también importa en qué momento lo hace.

Parte de la diferencia es ilusoria. En el caso general, una estrategia pura es un plan de acción que le indica al jugador qué hacer ante todas las contingencias que pudieran surgir en el juego. Por lo tanto puede preverse que los jugadores elijan una sola estrategia de una vez y para siempre al principio del juego, y a partir de ahí deleguen el desarrollo del juego en un robot. La *forma estratégica* de Ajedrez resultante tendrá el mismo aspecto que el Juego del Gallina o la Guerra de Sexos, excepto en que su tabla de pagos será de suma cero y tendrá una cantidad inmensamente mayor de filas y columnas.

Von Neumann sostenía que lo primero que hay que hacer en cualquier juego es reducirlo a su forma estratégica, a la que por esta razón llamó «forma normal». No obstante, el caso del Ajedrez deja claro que esta propuesta no siempre es muy práctica, ya que ¡tiene más estrategias puras que el número estimado de electrones en el universo conocido! Aun cuando la forma estratégica no es irremediablemente poco práctica, a menudo es mucho más fácil calcular los resultados mediante la *forma extensiva* del juego.

Los expertos en teoría de juegos emplean la analogía del árbol para describir un juego en forma ex-

estratégica, de incentivos, jugadores y pagos, se empieza en mayúscula. *(N. del T.)*

tensiva. Cada movimiento corresponde a un punto llamado nodo, de donde salen ramas. La raíz del árbol corresponde al primer movimiento del juego. Las ramas de cada nodo corresponden a las decisiones que pueden tomarse en ese movimiento. Las hojas del árbol corresponden a los resultados finales del juego, de modo que hay que establecer quién consigue qué pagos en cada hoja. También hay que establecer qué jugador mueve en cada nodo y qué sabe el jugador sobre lo que ha pasado hasta entonces en el juego cuando efectúa el movimiento.

En el Póquer, el primer movimiento es llevado a cabo por un jugador ficticio llamado Suerte, que baraja y reparte las manos de cartas que reciben los verdaderos jugadores. Lo que los jugadores saben sobre este movimiento es extremadamente importante, ya que el juego carecería de interés si todos supieran las cartas que han recibido los demás. No obstante, dejaremos los juegos de información imperfecta como éste para el capítulo siguiente. Todos los juegos de este capítulo serán juegos con información perfecta, en los cuales nada de lo que ha pasado en el juego hasta un determinado momento se les esconde a los jugadores cuando llevan a cabo un movimiento. Tampoco analizaremos juegos con información perfecta que, como el Duelo, contienen movimientos con resultados aleatorios. Por lo tanto, el Ajedrez es el ejemplo arquetípico de este capítulo.

Retroinducción

La retroinducción es un tema polémico, pero todo el mundo está de acuerdo en que siempre podríamos emplearla para encontrar los valores maximin de los jugadores en un juego finito de información perfecta si tuviéramos un ordenador lo suficientemente potente y dispusiéramos del tiempo necesario. Con una palanca lo suficientemente larga y un punto de apoyo, Arquímedes tenía razón en términos similares cuando decía que podría mover el mundo. Aplicar la retroinducción al Ajedrez ilustra tanto sus virtudes teóricas como sus defectos en la práctica.

Ajedrez

Etiqueta cada una de las hojas del juego de Ajedrez con GANAR, PERDER o TABLAS, según el resultado del jugador con las blancas. Ahora toma cualquiera de los penúltimos nodos (en los que cada decisión lleva inmediatamente a una hoja del árbol). Hay que encontrar la mejor decisión para el jugador que mueve en ese nodo. Marca el penúltimo nodo con la etiqueta de la hoja a la que lleva esa decisión. Finalmente, desecha todo el árbol que sigue al penúltimo nodo, que en este momento se convierte en hoja de un árbol menor en el que los valores maximin de los jugadores no cambian.

Ahora hay que hacer lo mismo una y otra vez, hasta que sólo queda una etiqueta pegada a la raíz

del árbol original. La etiqueta es el resultado maximin de las blancas.

No importa lo potentes o rápidos que puedan llegar a ser los ordenadores porque nunca serán capaces de completar este programa con el Ajedrez, ya que se tardaría demasiado. Así que probablemente nunca sabremos la solución del Ajedrez. Pero, al menos, se ha establecido que, a diferencia del Bigfoot o el Monstruo del Lago Ness, sí existe realmente una solución para el Ajedrez.

Si el resultado maximin del jugador con las blancas es GANAR, tiene una estrategia pura que le garantiza una victoria contra cualquier estrategia defensiva de las negras. Si el resultado maximin de las blancas es PERDER, las negras tienen a su disposición una estrategia pura que les garantiza una victoria contra toda defensa de las blancas. No obstante, la mayoría de expertos vaticinan que los resultados

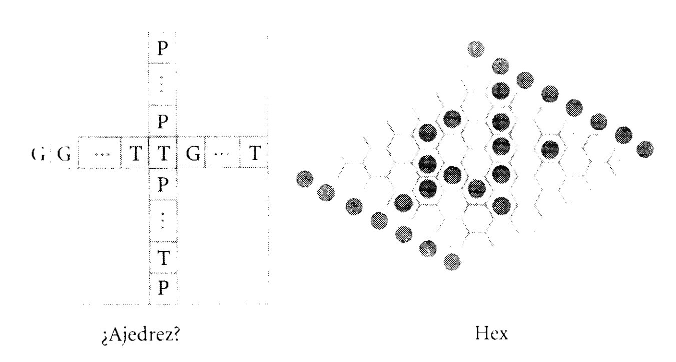


FIGURA 10. Dos juegos de mesa.

maximin de las blancas son TABLAS, lo que significa que tanto las blancas como las negras tienen estrategias puras para garantizar un empate contra toda defensa de su adversario.

Por lo tanto, si estos expertos están en lo cierto, la forma estratégica del Ajedrez tiene una fila donde todos los resultados son GANAR O TABLAS y una columna en la que todos los pagos son PERDER O TABLAS, como muestra la Figura 10. Sin el argumento de la retroinducción, no estoy seguro de que este hecho resultara obvio en absoluto.

Hex

Piet Hein inventó este juego en 1942. Lo reinventó Nash en 1948. Se dice que tuvo la idea al contemplar los azulejos hexagonales del lavabo de caballeros del Departamento de Matemáticas de Princeton. De hecho, los azulejos eran hexagonales, pero Nash me ha contado que no recuerda que fueran en absoluto inspiradores.

El Hex es un juego de negras contra blancas en un tablero de hexágonos dispuestos en forma de paralelogramo, como en la Figura 10. Al principio del juego, el territorio de cada jugador consiste en dos lados opuestos del tablero. Los jugadores mueven por turnos y empiezan las blancas. El movimiento consiste en situar una de las fichas en un hexágono vacío. El ganador es el primero que enlaza los dos la-

dos del tablero, de modo que en el juego recién acabado que muestra la Figura 10 ganan las negras.

Como en el Ajedrez, teóricamente podemos calcular los pagos maximin de los jugadores mediante la retroinducción, pero el método no resulta práctico cuando el tablero es grande. No obstante, sabemos que el pago maximin de las blancas es GANAR. Es decir, el primer jugador que mueve dispone de una estrategia que le garantiza la victoria contra toda defensa que le oponga el segundo jugador. ¿Cómo lo sabemos?

En primer lugar, hay que destacar que el Hex no puede acabar en empate. Para entenderlo, hay que pensar en las fichas negras como agua y en las fichas blancas como tierra. Cuando todos los hexágonos están ocupados, o bien el agua fluirá entre los dos lagos que originalmente pertenecían a las negras o el canal entre ellos estará bloqueado. Las negras vencen en el primer caso, y las blancas en el segundo. Así que o las negras o las blancas tienen una estrategia ganadora.

Nash inventó un argumento robaestrategias para mostrar que el ganador debe ser Blanco. El argumento consiste en una contradicción. Si las negras fueran a jugar una estrategia ganadora, las blancas podrían robársela mediante las reglas siguientes:

1. Pon tu primera ficha en cualquier casilla.
2. En movimientos posteriores, haz como si la primera ficha que has puesto no estuviera en el

tablero. A continuación, imagínate que todo el resto de fichas blancas son negras y que todas las fichas negras son blancas.

3. Efectúa el movimiento que harían las negras en esta posición si emplearan su estrategia ganadora. Si ya tienes una ficha en esta posición, mueve a otra casilla.

Esta estrategia te garantiza una victoria, porque simplemente haces lo que le garantiza una victoria a las negras, pero con un movimiento de antelación. La presencia en el tablero de una ficha blanca adicional puede hacer que ganes antes de lo que lo habrían hecho las negras, ¡pero supongo que no te quejarás de eso!

Dado que los dos jugadores no pueden ser el ganador, nuestro supuesto de que las negras tienen una estrategia ganadora debe estar equivocado. Por consiguiente, el ganador es el jugador de las blancas, aunque conocer este hecho no le ayudará mucho cuando juegue al Hex en un tablero grande, ya que encontrar la estrategia ganadora de las blancas es un problema por resolver en un caso general.

Hay que tener en cuenta que el argumento del robo de la estrategia no nos dice nada sobre la *verdadera* estrategia ganadora de las blancas. Ciertamente no tienen la victoria garantizada tras haber colocado la primera ficha en cualquier sitio. Si pones la primera ficha en una esquina del tablero, probable-

mente podrás ver por qué las negras tienen una estrategia ganadora para el resto del juego.

También puede resultar divertido poner a prueba tu capacidad de razonamiento con una versión del Hex que unos matemáticos de Princeton supuestamente empleaban para tomarles el pelo a sus visitantes. Se añade una línea extra de hexágonos, de forma que los dos lados de las blancas del tablero se separan más que los de las negras. En el nuevo juego, no solamente son las negras las que tienen una estrategia ganadora, sino que podemos escribirla. No obstante, cuando los visitantes jugaron con las blancas contra el ordenador, en la pantalla el tablero se mostraba en perspectiva para disfrazar su asimetría. Así que ¡los visitantes pensaban que estaban jugando al Hex normal; para su consternación y frustración, de un modo u otro siempre ganaba el ordenador!

Borrar estrategias dominadas

Cada vez que se desechan un montón de decisiones de un nodo al realizar una retroinducción, se está descartando un montón equivalente de estrategias puras. Desde el punto de vista de la forma estratégica del juego que has alcanzado en esa fase, cualquier estrategia que se descarta está *dominada* por una estrategia exactamente igual excepto porque pide que se tome la mejor decisión en el nodo en cuestión.

Si excluimos el caso en el que dos estrategias siempre comportan el mismo pago, una estrategia está dominada por otra si en ningún caso ofrece un pago mayor que el de ésta, independientemente de las estrategias que puedan emplear los demás jugadores. En el Dilema del Prisionero, *halcón* domina sobre *paloma* (pero no en el Juego de la Caza del Ciervo de la Figura 18).

Por lo tanto, podemos imitar la retroinducción en un juego borrando sucesivamente las estrategias dominadas en su forma estratégica. A veces con este método se puede reducir la forma estratégica a un solo resultado aunque no se imite la retroinducción. El resultado siempre será un resultado maximin si el juego es de dos jugadores y suma cero. Pero ¿qué hay de los juegos en general?

Todo equilibrio de Nash de un juego conseguido mediante la eliminación de estrategias dominadas de un juego mayor también tiene que ser un equilibrio de Nash del juego mayor. Ello se debe a que añadir una estrategia dominada a tus opciones en el juego no puede convertir ninguna de tus actuales estrategias en algo peor. A veces se pueden perder equilibrios de Nash cuando se borran estrategias dominadas (a menos que todas las dominaciones sean estrictas), pero nunca pueden eliminarse *todos* los equilibrios de Nash del juego original.

Juegos de adivinar

Si Alice opera en el mercado de valores, espera que aumente el valor de las acciones que compra. Dado que el valor futuro de éstas depende de lo que otra gente piense de ellas, los inversores como Alice realmente invierten en los fundamentos de sus creencias sobre las creencias de otras personas. Si Bob planea beneficiarse de inversores como Alice, tendrá que tener en cuenta sus creencias sobre lo que ella cree que los otros creen. Si queremos beneficiarnos de Bob, necesitaremos preguntarnos qué creemos que Bob cree que Alice cree sobre lo que creen los demás.

Fue célebre el uso por parte de John Maynard Keynes de los concursos de belleza organizados por los periódicos de su época para ilustrar cómo estas cadenas de creencias se alargan más y más cuanto más se piensa en el problema. El objetivo de dichos concursos consistía en elegir a la chica elegida por el máximo número de personas. Los expertos en teoría de juegos prefieren un juego de adivinar más simple cuyos ganadores son aquellos jugadores que elijan el número más cercano a dos tercios de la media de todos los números elegidos.

Si los jugadores están limitados a números enteros del 1 al 10, ambos inclusive, elegir un número por encima de 7 es una estrategia dominada, porque la media como mucho puede ser de 10, y $^2/_3 \times 10 = 6\,^2/_3$. Por lo tanto, siempre incrementas tus posibilidades de ganar si juegas 7 en lugar de 8, 9 o 10. Pero

si todo el mundo lo sabe, nadie jugará jamás a una estrategia dominada, por lo que nos encontramos en un juego cuyos jugadores eligen un número entre 1 y 7, ambos inclusive. La media de este juego puede ser como máximo de 7, pero $^2/_3 \times 7 = 4\ ^2/_3$. De modo que elegir un número por encima de 5 es una estrategia dominada.

Es obvio adónde conduce este argumento. Si es de todos sabido que ningún jugador empleará una estrategia dominada, todos los jugadores deben elegir el número 1.

De todos sabido

Algo es de todos sabido si todos lo saben, todos saben que todos lo saben, todos saben que todos saben que todos lo saben, etcétera. Si no se dice lo contrario, en el análisis racional de un juego existe el supuesto implícito de que tanto el juego como la racionalidad de los jugadores son conocidos por todos. De otro modo, no tendríamos derecho a usar la idea del equilibrio de Nash para incurrir en infinitas regresiones de la forma: «Alice cree que Bob cree que Alice cree que Bob cree...».

Una vez vi un concurso de preguntas llamado *El precio justo*, en el cual los tres concursantes intentan adivinar el valor de una antigüedad. El que se acerque más al valor real es el ganador. Si el último concursante piensa que el valor es mayor que el dado

por las otras dos propuestas, obviamente debería incrementar la propuesta más alta en no más de un dólar. Dado que no es esto lo que pasa, sería una tontería intentar aplicar la teoría de juegos a los concursos bajo el supuesto de que es bien sabido que los concursantes son racionales. Por lo tanto, hay que agradecer que la interpretación evolutiva de la teoría de juegos no requiera supuestos tan fuertes.

Perfección en el subjuego

Daniel Ellsberg es conocido por poner al descubierto la dirección de la guerra de Vietnam por parte del gobierno de Nixon cuando filtró los papeles del Pentágono al periódico *New York Times* en el año1971. En una encarnación anterior, propuso el Juego del Secuestro.

Secuestro

Alice ha secuestrado a Bob. La fianza se ha pagado, y ahora la cuestión es si debería liberarlo o matarlo. Alice preferiría liberar a Bob si pudiera estar segura de que éste no revelaría su identidad. Bob ha prometido no decir nada, pero ¿puede Alice confiar en su palabra?

La Figura 11 muestra el árbol de decisión del Secuestro junto con la correspondiente tabla de pagos.

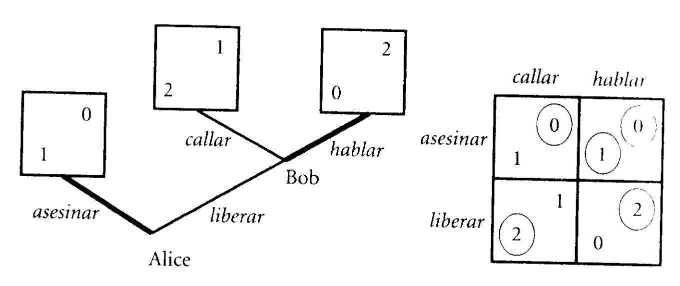


FIGURA 11. Secuestro.

Marcar las mejores respuestas revela que sólo hay un equilibrio de Nash, en el cual Alice asesina a Bob porque predice que hablará si le libera.

Borrar estrategias dominadas nos lleva al mismo equilibrio de Nash. Para Bob, la estrategia *hablar* siempre es al menos tan buena o más que *silencio*. Así que el primer paso es borrar *silencio*. En lo que queda de juego, la estrategia *asesinar* de Alice siempre es tan buena o más que *liberar* (porque Bob solamente puede jugar *hablar* en el juego reducido). De modo que nos queda solamente un equilibrio de Nash (*asesinar, hablar*).

Borrar las estrategias dominadas de este modo se corresponde con emplear la retroinducción en el árbol de decisión. Primero hay que engrosar la rama del árbol de decisión que representa la mejor elección de Bob, *hablar*. A continuación, hay que olvidar por completo que la elección inferior de Bob existe y engrosar la rama que representa la mejor decisión de Alice en el juego restante, *asesinar*. Ahora puede verse el camino de equilibrio que se seguirá cuando Ali-

ce y Bob jueguen el equilibrio de Nash (*asesinar, hablar*). En este caso, una sola rama engrosada vincula la raíz del juego con una hoja; en un juego más extenso, el camino de equilibrio consistiría en toda una secuencia de ramas engrosadas que vinculan la raíz a una hoja.

En los juegos de información perfecta como el del Secuestro, la retroinducción siempre conduce a estrategias que no sólo son equilibrios de Nash en el juego en general, sino también en todos sus subjuegos –ya estén en la ruta de equilibrio o no–. Reinhard Selten compartió un Premio Nobel con Nash en parte por introducir este tipo de equilibrios. Al principio los denominó «perfectos», pero más tarde cambió de idea sobre lo que debería significar «perfección». Así que ahora los llamamos *equilibrios de perfección en el subjuego*.

Contrafácticos

A los políticos les gusta hacer creer que las preguntas hipotéticas no tienen sentido. Como dijo George Bush padre en 1992 al contestar a una pregunta impecablemente razonable sobre los subsidios de desempleo: «si una rana tuviera alas, no podría golpear el suelo con su cola». Pero el Juego del Secuestro muestra por qué las preguntas hipotéticas son la sangre vital de la teoría de juegos, al igual que deberían ser la sangre vital de la política.

Los jugadores racionales se ciñen a sus estrategias de equilibrio, por lo que predicen qué *ocurriría* si se *fueran* a desviar. La presencia del condicional y el subjuntivo en esta frase se debe a que estamos hablando de un acontecimiento contrafáctico –un acontecimiento que no va a pasar–. Lejos de ser irrelevantes para la realidad, estos contrafácticos siempre surgen cuando se toma una decisión racional. ¿Por qué Alice nunca se pone delante de un coche cuando cruza la carretera? Porque predice que, si lo hiciera, sería atropellada. ¿Por qué mata Alice a Bob en el Juego del Secuestro? Porque cree que la delataría si no lo hiciera.

Por lo tanto, qué pasaría en subjuegos a los que no se llegará si resulta relevante. ¡Si no se llega a ellos es por lo que pasaría si se llegara a ellos!

¿Cambiar el juego?

Los psicólogos aconsejan a las víctimas de un secuestro que intenten establecer y desarrollar una relación humana con sus captores. Si de este modo Bob pudiera persuadir a Alice de que se preocupa lo suficiente por ella, de modo que sus pagos por permanecer callado y delatarla se inviertieran, jugaríamos a un juego distinto que podría denominarse Secuestro Agradable.

Como muestra la Figura 12, el Secuestro Agradable tiene dos equilibrios de Nash con estrategias pu-

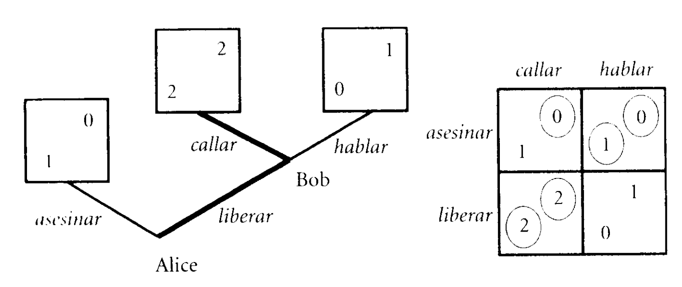


FIGURA 12. Secuestro Agradable.

ras: (*asesinar, hablar*) y (*liberar, callar*). El equilibrio (*asesinar, hablar*) ya no es perfecto en el subjuego, porque exige que Bob elija la opción inferior, *hablar*, en el subjuego al que no se llega en equilibrio porque Alice realmente elige *asesinar*, pero que se alcanzaría si Alice eligiera *liberar* en su lugar.

No obstante, este nuevo equilibrio (*liberar, callar*) es perfecto en el subjuego. Por consiguiente, es este el equilibrio que se jugará, siempre que Alice sea racional y sepa que Bob es racional. Si los pagos se eligen de acuerdo con la teoría de las preferencias reveladas, resultaría tautológico que Bob eligiera *callar* en lugar de *hablar* si Alice eligiera *liberar*. Por consiguiente, Alice decidirá *liberar* porque sabe que comportará unos pagos mejores que *asesinar*.

La moraleja es que la racionalidad a veces nos dice más que simplemente «Alice y Bob deben elegir un equilibrio de Nash».

El Juego del Ultimátum

Reinhard Selten tiene un sentido del humor malicioso y puede ser que obtenga placer de la controversia creada por su noción del equilibrio de perfección en el subjuego. Ciertamente, echó leña al fuego cuando le propuso a su estudiante Werner Güth que llevara a cabo un experimento de laboratorio sobre el tema. El experimento consistía en observar si en la realidad la gente jugaría el equilibrio de perfección en el subjuego en el Juego del Ultimátum. Selten predijo que no lo harían. Y tenía razón.

El Juego del Ultimátum es un primitivo juego de negociación en el cual un filántropo de mente especulativa ha donado una suma de dinero a repartir entre Alice y Bob si se ponen de acuerdo en cómo dividirla. Las reglas especifican que Alice le hace primero una propuesta a Bob sobre cómo repartir el dinero. Éste puede aceptarla o rechazarla. Si la acepta, se adopta la propuesta de Alice. Si la rechaza, el juego se acaba sin que los jugadores se lleven nada.

Es fácil aplicar la retroinducción al juego bajo el supuesto de que ambos jugadores sólo están preocupados por conseguir el máximo de dinero posible. Si Alice le ofrece a Bob una cantidad positiva, él dirá que *sí*, puesto que cualquier suma es mejor que nada. Por consiguiente, lo máximo que Alice ofrecerá es un penique. Por tanto, en un equilibrio de perfección en el subjuego, Alice se llevará todo el dinero.

No obstante, los experimentos de laboratorio muestran que en la realidad los individuos a menudo juegan con justicia. La propuesta más probable es un reparto del 50% para cada uno. Las propuestas de un reparto injusto, como un 70% contra 30%, son rechazadas la mayoría de las veces, aunque el que responde no consigue nada en absoluto. Éste es el resultado más repetido en la economía experimental. Yo mismo lo he repetido varias veces. No cambia cuando se incrementan las sumas en juego. Se mantiene incluso en países donde los pagos en dólares constituyen una fracción significativa de la renta anual de los individuos. El resultado no es completamente universal, pero hay que seguir a los antropólogos hasta partes remotas del mundo para encontrar excepciones.

Una nueva escuela de economistas del comportamiento usa este resultado como palo con el que golpear a sus rivales tradicionales. Explican que los datos desmienten el «axioma del egoísmo» de la economía ortodoxa. El desafío que plantean se dirige, pues, a la hipótesis de que la gente sólo se preocupa por el dinero en lugar de por la lógica de la retroinducción.

En realidad, que las personas sean egoístas recalcitrantes no es un axioma de la economía. La ortodoxia está representada por la teoría de las preferencias reveladas. Todo el mundo está de acuerdo en que el dinero no lo es todo. Hasta Milton Friedman solía ser cariñoso con los animales y donar dinero a

la caridad. Pero también es verdad que existe un número inmenso de experimentos que muestra que en los juegos de laboratorio la mayoría de los sujetos al final sí acaban comportándose como si su principal interés consistiera en maximizar sus pagos en dólares. El Dilema del Prisionero es la norma más que la excepción. Así que, ¿qué hace distinto al Juego del Ultimátum?

Creo que la respuesta se encuentra en el hecho de que las interpretaciones racional y evolutiva de un equilibrio divergen al aplicarse a equilibrios de perfección en el subjuego.

El Minijuego del Ultimátum

En esta versión simplificada del Juego del Ultimátum, el filántropo dona 4 dólares. Alice le puede hacer a Bob una propuesta justa o injusta. La oferta justa consiste en repartir el dinero equitativamente, mitad y mitad. Bob acepta automáticamente la oferta justa, pero tiene la opción de aceptar o rechazar la oferta injusta, que le asigna a Alice 3 dólares y a Bob solamente 1 dólar. La Figura 13 muestra el árbol de decisión y la tabla de pagos del Minijuego del Ultimátum. Este análisis es el mismo del Secuestro Agradable, aunque en este caso la lógica del argumento es controvertida porque a sus detractores no les gusta adónde conduce.

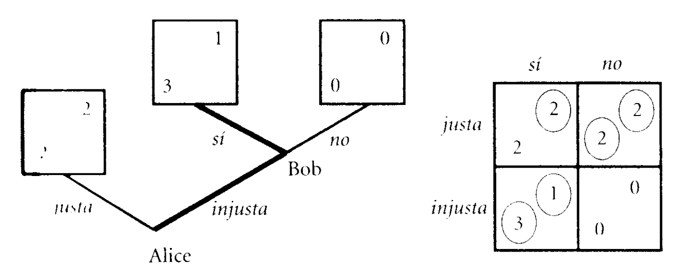


FIGURA 13. Minijuego del Ultimátum. Aparte de las etiquetas de las acciones posibles y de algunos cambios sin consecuencias en los pagos, el juego es el mismo que el del Secuestro Agradable.

El equilibrio de perfección en el subjuego es (*injusta, sí*). Como el Secuestro Agradable, el juego tiene otro equilibrio de Nash: (*justa, no*). De hecho, tiene muchos equilibrios de Nash en los que Alice elige *justa* porque Bob planea usar una estrategia mixta en la que dice *no* a una oferta injusta con una probabilidad lo suficientemente alta.

La razón para preocuparse por los equilibrios de Nash que no sean de perfección en el subjuego es que no hay motivos para suponer que un proceso evolutivo necesariamente convergerá en el equilibrio de perfección en el subjuego. Si los sujetos están aprendiendo por ensayo y error qué equilibrio jugar, podrían aprender a jugar cualquier equilibrio de Nash del Minijuego del Ultimátum.

La Figura 14 muestra dos procesos evolutivos del Minijuego del Ultimátum. Uno consiste en la dinámica de la mejor respuesta que ya hemos analizado

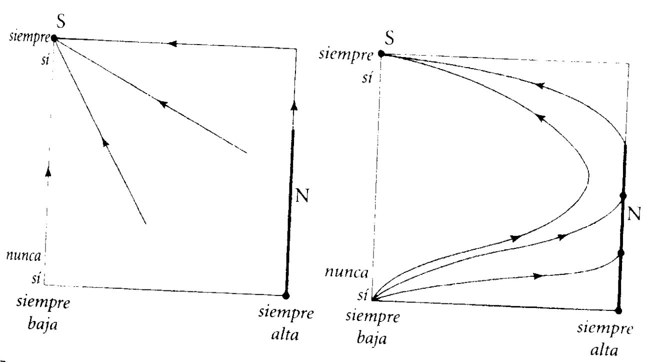


FIGURA 14. Ajuste evolutivo en el Minijuego del Ultimátum. El equilibrio de perfección en el subjuego es *S*. Los otros equilibrios de Nash se encuentran en el conjunto *N*. Éstos requieren, en todos los casos, el empleo de la estrategia débilmente dominada *no*, pero *N* todavía tiene una gran cuenca de atracción en el caso de la dinámica del replicador.

anteriormente; el otro es una *dinámica del replicador*, más compleja, que normalmente es considerada un mejor modelo básico de un proceso de ajuste (véase Estabilidad Evolutiva, Capítulo 8).

La dinámica de la mejor respuesta converge en el equilibrio de perfección en el subjuego, pero ello no ocurre necesariamente en la dinámica del replicador. El conjunto de equilibrios de Nash en los que Alice elige *justa* tiene una gran cuenca de atracción en la Figura 14.

A la evolución no le importa que la elección de *no* por parte de Bob sea débilmente dominada en todos estos equilibrios. Es verdad que el *sí* siempre es mejor que el *no* en el caso de que Alice juegue *injusta* de

vez en cuando, pero la presión evolutiva contra *injusta* puede ser tan fuerte que desaparezca del todo. Una vez desaparecida, *no* puede sobrevivir, porque entonces Bob es indiferente entre *sí* y *no*.

Convenciones justas

Ahora tenemos una explicación para los datos experimentales del Juego del Ultimátum que no necesita asignar a los jugadores preferencias distintas de las que revelan cuando juegan al Dilema del Prisionero en el laboratorio.

En la vida real, Bob sería estúpido si cediera ante una oferta injusta, porque no puede permitirse adquirir la reputación de ser un blando. Por consiguiente, aplicamos una convención por la cual Alice a menudo es rechazada si hace una oferta injusta. Los sujetos llevan esta convención al laboratorio sin darse cuenta de que coordina un equilibrio en el juego de la vida, o de que el juego al que les piden que jueguen en el laboratorio es muy distinto de los juegos de la vida real para los que está adaptada la convención.

Cuando los sujetos comienzan jugando con justicia en el Dilema del Prisionero, las presiones evolutivas empiezan inmediatamente a modificar su comportamiento, porque el único equilibrio de Nash del Dilema del Prisionero evita cualquier tipo de cooperación. El Juego del Ultimátum difiere del Dilema

del Prisionero en que tiene muchos equilibrios de Nash. Cualquier reparto del dinero disponible se corresponde con un equilibrio de Nash, por la misma razón por la que esto se cumple en el Minijuego del Ultimátum. Cuando Alice y Bob empiezan jugando con justicia en el Juego del Ultimátum, no existen presiones evolutivas evidentes que los conduzcan hacia el equilibrio de perfección en el subjuego. Por consiguiente, no hay necesidad de inventar una razón para explicar que no se muevan mucho de donde empezaron.

Los teóricos de los juegos se sienten felices de que los economistas del comportamiento argumenten en contra del egoísmo. ¿Cómo si no explicaríamos por qué Milton Friedman contribuía a obras de caridad? Pero cometen dos errores al afirmar: «La teoría de juegos predice el equilibrio de perfección en el subjuego en el Juego del Ultimátum». El primero es que la teoría de juegos asume que los jugadores necesariamente maximizan el dinero. El segundo es que la teoría de juegos racional y evolutiva siempre predice lo mismo.

Refinamientos

La evolución no siempre elige los equilibrios de perfección en el subjuego, pero para Alice sigue siendo racional resolver el Minijuego del Ultimátum por retroinducción cuando los pagos se determinan me-

diante la teoría de las preferencias reveladas. El supuesto estándar de que Alice sabe que Bob es racional resulta esencial para este fin, porque Alice necesita estar segura de que el comportamiento de Bob será coherente con los pagos a él asignados.

¿Implica nuestro supuesto estándar que la racionalidad de los jugadores es conocida por todos y que se seguirá un camino hacia el equilibrio de perfección en el subjuego en *cualquier* juego finito con información perfecta? Bob Aumann dice que *sí*, y cabría pensar que debería saberlo, dado que ganó un Premio Nobel en parte por convertir lo que es conocido por todos en una herramienta operativa. Pero ejemplos como el de la Cadena de Establecimientos de Selten mantienen abierta la cuestión.

La paradoja de la Cadena de Establecimientos

El Minijuego del Ultimátum puede reinterpretarse como un juego en el cual Alice amenaza con abrir una tienda en una ciudad donde Bob ya dirige un establecimiento similar. Sólo tenemos que rebautizar las estrategias de Alice como *fuera* y *dentro* y las de Bob como *aceptarlo* y *luchar*. Luchar consiste en iniciar una guerra de precios, que es perjudicial para ambos jugadores. La paradoja de Selten surge cuando Bob dirige una cadena de establecimientos en cien ciudades y Alice es sustituida por cien posibles

rivales que amenazan con establecer una tienda rival en cada ciudad.

Al igual que en el Minijuego del Ultimátum, la retroinducción establece que en el centésimo juego el centésimo rival entrará en el mercado y Bob lo aceptará. Por lo tanto, lo que ocurre en el centésimo juego está determinado independientemente de lo que pasa en juegos anteriores, y el mismo argumento se aplica al juego nonagésimo noveno. Si continuamos con el razonamiento, acabamos llegando a la conclusión de que el rival siempre entrará y Bob siempre lo aceptará. Pero ¿haría mejor Bob si luchara contra los primeros competidores para desincentivar la entrada en el resto de ciudades?

El árbol de decisión de la Figura 15 es una simplificación con sólo dos ciudades y un solo rival, Alice. Si ésta entra en la primera ciudad, Bob puede conformarse o luchar. Si Alice entra en la segunda ciudad, Bob de nuevo debe elegir entre conformarse o luchar. Si Alice no entra en la primera ciudad, simplificamos al asumir que necesariamente se queda fuera de la segunda. De un modo similar, si Bob acepta en la primera ciudad, necesariamente Alice entra en la segunda ciudad y Bob vuelve a aceptarlo.

Las líneas gruesas de la Figura 15 muestran el resultado de aplicar la retroinducción. Si el gran libro de la teoría de juegos recomendara seguir el camino del equilibrio de perfección en el subjuego, para Alice sería acertado entrar en las dos ciudades y para Bob conformarse las dos veces. Pero ¿siguen Alice y

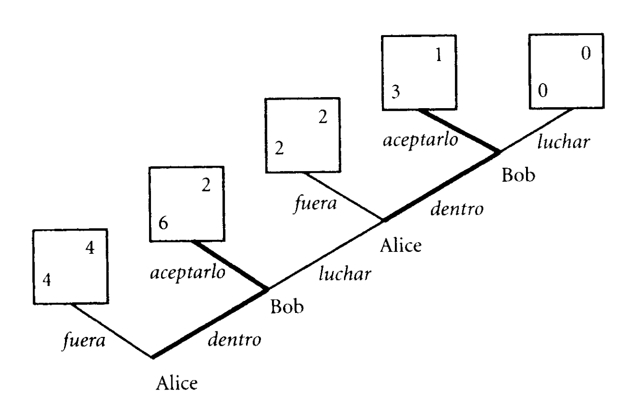


FIGURA 15. Una versión simplificada de la Paradoja de la Cadena de Establecimientos. Aparte de las etiquetas de las acciones posibles, el subjuego que empieza en el segundo movimiento de Alice es idéntico al Minijuego del Ultimátum.

Bob los consejos del libro? Para analizar esta pregunta, ponte en el lugar de Bob en su primer movimiento.

Alice acaba de entrar en la primera ciudad como recomendaba el libro, pero ¿qué haría si llegara a su segundo movimiento? La respuesta depende de lo que ella previera que Bob haría si llegara un segundo movimiento. Si Alice supiera que Bob es racional, predeciría que éste se iba a conformar. En ese caso, debería entrar y en su primer movimiento Bob se conformaría, como exige la retroinducción. Pero Alice *no sabía* que Bob es racional en su segundo movimiento, ¡porque un Bob racional no habría luchado en su primer movimiento si el gran libro de la teoría de juegos tuviera razón sobre qué es racional!

Alice empieza el juego con la creencia de que Bob es racional, pero si éste juega de una forma incoherente con sus propias preferencias, luchando en la primera ciudad, la creencia de Alice será refutada. ¿Y quién sabe lo que podría creer después de un suceso contrafáctico como ése? La versión original de Selten de la paradoja tiene 100 tiendas, porque la respuesta de sentido común después de que Bob haya emprendido una guerra de precios en 50 ciudades es que probablemente también luchará en la número 51. Pero en ese punto el argumento de la retroinducción se desmorona.

La paradoja no pone en duda la retroinducción como manera de encontrar los pagos maximin en juegos de suma cero con dos jugadores. Tampoco pone en duda la racionalidad de la retroinducción en juegos como el del Secuestro o el del Utimátum. En cualquier caso, la creencia inicial de los jugadores de que todo el mundo es racional podría ser refutada si alguien fuera a apartarse del camino de equilibrio, pero este hecho no genera problemas en estos juegos cortos. Sin embargo, ¿cómo vamos a responder a la paradoja en juegos de mayor duración?

Errores tipográficos

Se dice que los equilibrios de perfección en el subjuego constituyen un *refinamiento* del concepto del equilibrio de Nash. Usarlos es seguro en tanto en

cuanto las circunstancias hagan recomendable que los jugadores sigan comportándose como si fuera de todos sabido que son todos racionales, aunque se hayan llevado a cabo uno o más movimientos irracionales. Todo un bestiario de refinamientos todavía más sutiles se ha creado para su empleo en juegos de información imperfecta. Éstos se basan en varias ideas diferentes sobre qué creencias tendrían sentido en el caso contrafáctico de que incluso un jugador racional jugara irracionalmente. ¡Si George Bush padre leyera literatura, se marearía! Afortunadamente, esta fase de la historia de la teoría de juegos está definitivamente acabada –aunque los expertos en economía aplicada siguen apelando al refinamiento del bestiario que más cerca esté de confirmar sus propios prejuicios–.

Mi propio punto de vista sobre estos temas consiste en que deberíamos seguir el enfoque de sentido común de Reinhard Selten, que elimina la necesidad de interpretar contrafáctico alguno. Recomienda que integremos los suficientes movimientos aleatorios (*chance moves*) en las reglas del juego para eliminar la posibilidad de que los jugadores se encuentren a sí mismos intentando explicar lo inexplicable. En el más simple de dichos modelos, se asume que los jugadores cometen errores ocasionalmente. Sus manos tiemblan al aproximarse al botón racional y presionan un botón irracional por equivocación. Si se trata de errores independientes y transitorios, como los tipográficos, que no tienen implicaciones

para los errores que puedan cometerse en el futuro, los equilibrios de Nash del juego con errores convergen con los equilibrios de perfección en el subjuego del juego sin errores, sólo si permitimos una frecuencia de errores muy pequeña.

Selten intentó rebajar el estatus de los equilibrios de perfección en el subjuego porque decidió que los límites de los equilibrios de Nash en los juegos realizados con la mano temblorosa son los que realmente merecen la consideración de perfectos. Pero el resto de la gente sólo reconoce que este tipo de equilibrios son de perfección con la mano temblorosa.

Lapsus mentales

La razón por la que otros teóricos de los juegos no estaban dispuestos a respaldar la nueva definición de Selten puede quizás relacionarse con las dudas sobre la generalidad de su historia de la mano temblorosa. Si se pretende que el análisis racional de un juego sea relevante para el comportamiento de la gente real que trata de afrontar problemas complejos de un modo inteligente, hay que enfrentarse al hecho de que sus errores son mucho más susceptibles de ser lapsus mentales que errores tipográficos.

Por ejemplo, nadie consideraría razonable explicar por qué el propietario de una cadena de establecimientos inició una guerra de precios sucesivamen-

te en 50 ciudades con el argumento de que en todos los casos pretendía instruir a sus directores para conformarse ante la entrada de un competidor, pero por alguna razón alguien mandaba siempre por error el mensaje equivocado. La única explicación plausible es que tiene una política de oponerse a la entrada de competidores y, por lo tanto, es probable que emprenda una guerra de precios en la 51.ª ciudad, sea o no una locura.

Cuando se introducen movimientos aleatorios que permiten que ocurran estos lapsus mentales, los equilibrios de Nash del juego con errores no deben converger en un equilibrio de perfección en el subjuego del juego sin errores. Así que los equilibrios de Nash del juego sin errores no pueden ser desechados como irrelevantes para el análisis racional. Pero tampoco se trata de deshacernos de la retroinducción. Todos los equilibrios de Nash del juego con errores son automáticamente perfectos en el subjuego porque los errores garantizan que se llega a cada subjuego con una probabilidad positiva. Por lo tanto, la retroinducción es una herramienta útil para localizar dichos equilibrios.

¿Moraleja?

La lección que extraigo de la controversia sobre el refinamiento es que los teóricos de los juegos se equivocaron al olvidar que su disciplina carece de

contenido sustantivo. Del mismo modo que no es asunto nuestro decir qué debería gustarle a la gente, tampoco lo es decir qué deben creer. Sólo podemos decir que si creen esto, sería incoherente no creer esto otro. Si no podemos analizar un juego solamente con estos principios de coherencia, hay que añadir al juego toda la información sobre los jugadores y su entorno que podamos.

4. Convenciones

Decidir qué equilibrio de Nash debería considerarse la solución racional a un juego de suma cero de dos jugadores no supone un problema, ya que cualquier par de estrategias maximin es siempre un equilibrio de Nash, en el cual los jugadores obtienen sus pagos maximin. Pero las cosas pueden cambiar mucho en juegos que no son de suma cero.

Por ejemplo, en la Guerra de Sexos, el pago maximin para los dos jugadores es de dos tercios. Curiosamente, el resultado es el mismo que los pagos que ambos consiguen en el equilibrio mixto del juego, pero sus estrategias maximin no son estrategias de equilibrio. Además, los pagos de Alice y Bob en ambos equilibrios puros del juego son mucho mayores que sus pagos maximin. Así que, ¿qué tendrían que hacer?

El Juego de la Conducción deja claro que no tiene sentido alguno buscar una respuesta estrictamente

racional. Cualquier posible argumento a favor de que todos condujeran por la izquierda sería tan bueno como el de que todos lo hiciéramos por la derecha. Algunos afirman a veces que, por lo tanto, la solución racional debe consistir en un equilibrio mixto en el que todos decidan si conducir por la izquierda o por la derecha de forma aleatoria, pero ¡esta propuesta raramente consigue mucho apoyo!

Para solucionar el Juego de la Conducción, necesitamos una *convención* comúnmente aceptada sobre si deberíamos conducir por la izquierda o por la derecha. El hecho de que una convención como ésta pueda ser completamente arbitraria se refleja en el hecho de que algunos países han adoptado la convención de conducir por la izquierda, y otros la de conducir por la derecha.

Puntos focales

En ocasiones las sociedades eligen convenciones de manera deliberada, como cuando en Suecia se pasó de conducir por la izquierda a conducir por la derecha en las primeras horas del 1 de septiembre de 1967. Sin embargo, quizás podría considerarse el caso de Suecia en esta ocasión como una versión para múltiples jugadores de la Guerra de Sexos, con algunos jugadores a favor del equilibrio tradicional y otros a favor del equilibrio empleado en el resto de la Europa continental. Por sí misma, la racionalidad

no puede solucionar estas diferencias sobre cómo solucionar los problemas de selección de un equilibrio, pero en Suecia la convención consiste en que hay que seguir las directrices de su gobierno democráticamente electo. Por otra parte, sólo hace falta observar el caos que, a pesar de las señales, existe en el tráfico en Nápoles para darse cuenta de que las directrices de un gobierno elegido democráticamente no bastan para garantizar que se cumplirá una convención.

Tom Schelling

¿Qué pasa cuando no se hace evidente una convención? Tom Schelling llevó a cabo una serie de experimentos en los años cincuenta que muestran que no somos tan incorregibles como podría pensarse a primera vista. Según él, las convenciones que la gente inventa cuando le hacen preguntas como las siguientes constituyen puntos focales. La mayoría de personas se sorprende tanto por su éxito a la hora de localizar puntos focales como por la naturaleza arbitraria de las pistas contextuales a las que ellos mismos acaban apelando. Una lección importante se encuentra en que el contexto en el que aparecen los juegos (el modo en que se *formula* un juego) puede marcar la diferencia en el modo de jugarlo en la vida real.

1. Dos jugadores eligen independientemente *cara* o *cruz*. No ganan nada a menos que ambos digan lo mismo, en cuyo caso cada uno gana 100 dólares. ¿Qué dirías?
2. Vas a reunirte con alguien en Nueva York mañana, pero no has acordado nada sobre cuándo y dónde va a tener lugar el encuentro. ¿Dónde irás? ¿A qué hora?
3. Alice, Bob y Carol deben escribir cada uno por separado las letras *A*, *B* y *C* en un orden determinado. No obtendrán nada a menos que elijan el mismo orden, en cuyo caso el jugador cuya inicial sea la primera obtiene 300 dólares, el jugador cuya inicial es la segunda obtiene 200 dólares y el jugador con la tercera inicial obtiene 100 dólares. ¿Qué harías si fueras Carol?
4. Alice y Bob reciben dos cartas cada uno. Una carta está en blanco y la otra marcada con una cruz. Un jugador puede marcar una cruz en la primera carta o borrar la cruz en la segunda. Nadie gana nada a menos que entre las dos cartas que se entregan sumen una, y solamente una, cruz. El jugador que entrega la carta con la cruz gana 200 dólares y el jugador que entrega la carta en blanco gana 100 dólares. ¿Qué harías si te tocara la carta en blanco?
5. Un filántropo dona 100 dólares a Alice y Bob, siempre que se pongan de acuerdo en la forma de repartirlos. Se pide a cada jugador por sepa-

rado que solicite una fracción del total. Si las fracciones suman más de 100 dólares, nadie consigue nada. En el caso contrario, cada jugador recibe la cantidad que solicitó. ¿Cuánto solicitarías?

6. Alice pierde 100 dólares y Bob los encuentra. Bob es demasiado honesto para gastar el dinero, pero no está dispuesto a devolverlo a menos que reciba una recompensa adecuada. ¿Qué recompensa le ofrecerías a Bob si fueras Alice? ¿Qué recompensa le ofrecerías si Bob ya hubiera rechazado 20 dólares? ¿Qué recompensa le ofrecerías si Alice y Bob hubieran visto juntos un programa de televisión la noche anterior en el cual un gurú anunciaba que el reparto justo en esas circunstancias consiste en que Bob obtenga una recompensa de un tercio de la cantidad total?

En la primera pregunta, la mayoría de la gente dice *cara,* porque lo convencional es decir *cara* antes que *cruz* cuando ambas se mencionan.

Lo bien que lo hagan los jugadores en la segunda pregunta depende de lo familiarizados que estén con Nueva York. Schelling se lo preguntó a gente de la cercana Nueva Inglaterra, que se mostró muy favorable a encontrarse en la estación Grand Central a mediodía.

En la tercera pregunta, Carol suele reconocer que el orden alfabético es tan focal que tiene que decir

ABC, aunque entonces recibirá los pagos más baj de los tres jugadores.

En la cuarta pregunta, el statu quo es focal y, p lo tanto, la mayoría de gente elegiría no hacer nad

En la quinta pregunta, un reparto al cincuen por ciento es casi universal.

La sexta pregunta es más complicada; normalmente la gente consigue coordinarse con eficaci sólo tras saber del gurú, en cuyo caso casi siempr siguen su consejo.

¿Cuánto es convencional?

La vida diaria consiste en jugar multitud de juegos de coordinación con los que nos rodean. Cuando los jóvenes aprenden cómo jugar a estos juegos de coordinación emulando a los jugadores exitosos de su entorno, normalmente no se dan cuenta en absoluto de que están llevando a cabo un juego. Aprenden cualquier convención que sea corriente en su sociedad sin apreciar que la convención no sobreviviría a largo plazo a menos que coordinara el comportamiento en un equilibrio. Cuando la propia convención existe desde hace tanto que sus orígenes se pierden en la noche de los tiempos, incluso puede resultar convencional negar que la convención sea convencional. Entonces resulta imposible reconocer que otras sociedades pueden estar jugando esencialmente al mismo juego que nosotros, pero que su

distinta historia social ha llevado a un equilibrio distinto del juego que se ha convertido en focal.

David Hume fue el primer filósofo en afirmar alto y claro que muchas de nuestras normas de conducta social no gozan de fundamentos más sólidos que la convención que empleamos para seleccionar un equilibrio en el Juego de la Conducción. En su *Tratado* de 1739, explica el famoso argumento:

> Dos hombres que reman en un bote lo hacen por acuerdo o convención, aunque nunca se han prometido nada el uno al otro. Tampoco la regla referente a la estabilidad de las propiedades deriva en menor medida de las convenciones humanas, surgiendo gradualmente y ganando fuerza en lenta progresión... De un modo similar se establecen los lenguajes gradualmente por las convenciones humanas, sin promesa alguna. De un modo similar se convierten el oro y la plata en medidas comunes de intercambio y se estiman pago suficiente por lo que tiene cien veces su valor.

La mayoría de la gente no tiene problemas para aceptar la naturaleza convencional de los lenguajes o el dinero, pero establece una frontera cuando los filósofos como Hume sugieren que pasa lo mismo con temas sensibles como la ética o la religión. A veces su oposición al relativismo moral o a la biología evolutiva es tan fuerte que sienten la necesidad de deshacerse también de la teoría de juegos. Sin embargo, pienses lo que pienses de las frutas podridas de Hume, la teoría de juegos no forma parte de ellas.

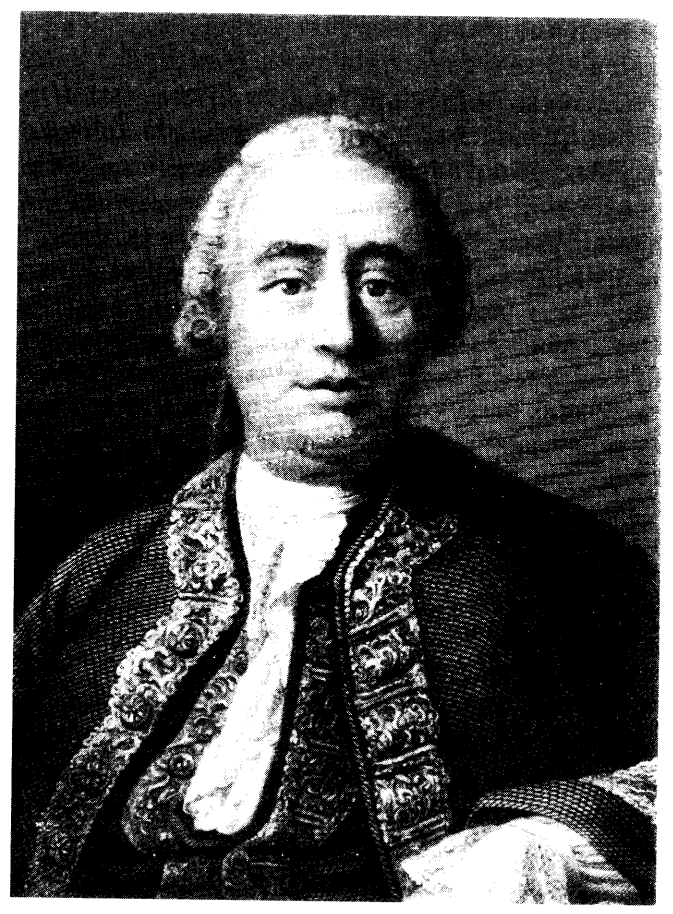


FIGURA 16. David Hume.

La teoría de juegos jamás puede suponer una amenaza para un sistema religioso o ético coherente porque no tiene más contenido sustantivo que la arit-

mética o la lógica. Solamente establece que algunas proposiciones no son coherentes con otras proposiciones. Como la aritmética o la lógica, puede por consiguiente utilizarse a ambos lados del argumento.

Muchos teóricos de los juegos son profundamente religiosos, como Bob Aumann, que compartió un Premio Nobel con Tom Schelling en 2006. Steve Brams incluso ha escrito un libro en el que usa la teoría de juegos para sustentar argumentos teológicos. En cuanto a mí, soy escéptico, pero mi *justicia natural*[1] acepta que algunos principios de justicia son universales en la especie humana. En resumen, los únicos que deben temer el uso de la teoría de juegos son aquellos cuyas creencias sean incoherentes.

Malas convenciones

El equilibrio mixto en el Juego de la Conducción no es eficiente en absoluto, ya que los jugadores que lo realicen acabarán la mitad de las veces parados uno enfrente del otro. Pero a pesar de ello sigue siendo un equilibrio y por tanto es susceptible de convertirse en convención. Yo solía decir que ésta es una convención que en realidad no ha surgido en ningún sitio del mundo, hasta que me corrigieron unos turcos que observaron que obviamente nunca había visita-

1 Juego de palabras a cuenta de uno de sus libros, *Natural Justice* (Binmore, 2005). *(N. del T.)*

do Turquía. Pero ahora ya lo he hecho y ya sé a q
se referían.

El Solitario de Schelling es un modelo básico q
pretende mostrar cómo la evolución cultural pue
conducir fácilmente a convenciones socialmente i
deseables sin necesidad de un genio malvado qu
desde las sombras planee el desmoronamiento de l
sociedad. Se juega en un tablero de Ajedrez con fi
chas blancas y negras; cada ficha representa el pro
pietario de una casa; el escaque que ocupa la fich
representa su casa, y los escaques que lo rodean
(hasta ocho) representan su vecindario. De modo
que una ficha sobre uno de estos escaques represen
ta un vecindario.

Cada ficha es sensible al color de los vecinos. Las
blancas prefieren que la mitad o más de sus vecinas
sean blancas; las negras desearían que un tercio o
más de sus vecinas fueran negras. El jugador desarrolla el proceso evolutivo trasladando fichas descontentas a escaques en los que están contentas, hasta que llega un momento en que nadie que quiera moverse tiene adónde ir. Schelling recomienda empezar con fichas negras en todos los escaques negros del tablero y blancas en todos los escaques blancos; se quitan algunas fichas aleatoriamente y a continuación empieza el proceso. En la Figura 17 se quitaron 12 fichas.

Las dos configuraciones que muestra la Figura 17 son equilibrios resultantes del proceso. Se diferencian en que existe una parte de aleatoriedad en la

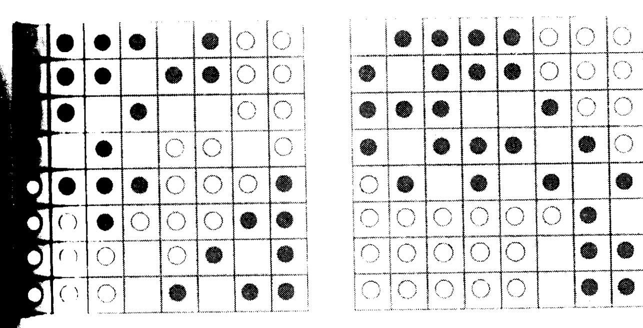


FIGURA 17. Solitario de Schelling.

configuración inicial y en la elección por parte del jugador de qué ficha descontenta mover. Pero el equilibrio que emerge tiene casi siempre las fichas blancas y las negras ocupando vecindarios segregados. Vale la pena jugar al Solitario de Schelling unas cuantas veces para hacerse una idea de cuán inexorable puede ser el proceso de separación. En el modelo, todo el mundo se contentaría con vivir en un vecindario mixto, pero acaban con una convención que les hace vivir segregados.

Dilemas sociales

El Solitario de Schelling muestra lo fácil que puede ser que se establezca una convención que no le gusta a nadie. De acuerdo con el sociólogo Vilfredo Pareto, los economistas dicen que los resultados son ineficientes cuando hay otros resultados que todo el

mundo prefiere. Pero si nos damos cuenta de que funcionamos con una convención ineficiente, ¿no estamos siendo colectivamente irracionales por no cambiar a una eficiente?

Quizás, el papel más importante de la teoría de juegos sea insistir en que toda reforma requiere la coordinación de los comportamientos en un *equilibrio* si tiene que sobrevivir a largo plazo. Si no existe un equilibrio satisfactorio por el que cambiar, como en el Solitario de Schelling, inventar un nuevo tipo de racionalidad que de algún modo oculte las incoherencias del comportamiento individual que implica un juego fuera del equilibrio sólo puede empeorar las cosas. No hay más que observar la larga nómina de utopías fallidas para comprobar por qué.

Karl Marx es uno de los mayores culpables. Cuando consideraba el capital y el trabajo como jugadores monolíticos de un poderoso juego, no fue capaz de darse cuenta de que la cohesión de la coalición depende de hasta qué punto tiene éxito a la hora de satisfacer las aspiraciones de los individuos que los conforman. Lo mismo puede decirse de una sociedad entera que es tratada como si fuera un solo individuo con mayúsculas. Ello no equivale a negar que la solidaridad grupal a veces pueda triunfar temporalmente sobre los incentivos individuales, incluso sin que los esquiroles sean castigados por los camaradas a los que traicionan. Tampoco equivale a negar que podríamos decir que todos estaríamos mejor si nos identificáramos más a menudo con alguna

concepción del bien común. Un comportamiento tal es altruista o incluso propio de un santo, pero nos estamos engañando si insistimos en que un comportamiento más egoísta es, de algún modo, irracional.

Como el malhumorado filósofo Thomas Hobbes explicó hace mucho tiempo:

> Las abejas y las hormigas viven amigablemente las unas con las otras... y, por lo tanto, algunos hombres pueden quizás querer saber por qué la humanidad no puede hacer lo mismo. Ante lo cual contesto... entre los animales, el bien común no difiere del privado.

En términos de teoría de juegos, Hobbes afirma que los juegos que realizan los insectos sociales entre sí son juegos de coordinación pura, pero supongo que la mayoría de las personas estarían de acuerdo conmigo en que raramente pasa lo mismo entre los seres humanos.

Los errores que estoy señalando aquí son típicos de los intelectuales de izquierda, pero los intelectuales de derechas no deben congratularse; con frecuencia incurren en el error complementario de pasar por alto la posibilidad de que existan equilibrios más eficientes que el equilibrio actual.

La contribución que la teoría de juegos puede hacer a estos debates consiste en un marco en el que discutir de un modo realista qué es posible o no para una sociedad. ¿Qué equilibrios son posibles en el juego en el que estamos? ¿Hay un equilibrio que nos

satisfaga más a todos que el equilibrio que jugamos actualmente? Si no nos gusta ninguno de los equilibrios posibles, ¿podemos cambiar de algún modo las reglas del juego o las preferencias de los jugadores?

¿Suponer que todo el mundo se comportará así?

Los psicólogos sociales dicen que una situación en la que un resultado eficiente entra en contradicción con los incentivos de los miembros individuales de un grupo es un dilema social. El Dilema del Prisionero constituye el ejemplo arquetípico.

A menudo puedes distinguir que estás en un dilema social por el hecho de que tu madre dejaría clara su desaprobación de cualquier inclinación agresiva por tu parte diciendo «imagínate que todo el mundo se comportara así». Immanuel Kant es considerado con frecuencia el mayor filósofo de todos los tiempos, pero él también pensó que no podía ser racional hacer algo malo porque todo el mundo lo hiciera. Como afirma el famoso imperativo categórico: «Actúa siempre bajo la máxima que te gustaría que se convirtiera en una ley universal».

Por ejemplo, cuando en el aeropuerto esperamos el equipaje frente a la cinta que nos trae las maletas, sería mejor para todos que nos mantuviéramos separados de la cinta para poder ver salir nuestras bolsas. Pero si todos los demás lo hicieran, a cada individuo le compensaría adelantarse un poco, así que

acabamos todos estirando el cuello para poder ver sobre un muro de espaldas.

De un modo similar, también saldríamos ganando si bajáramos el aire acondicionado cuando hay peligro de apagón, o si no usáramos nuestros aspersores en caso de sequía. Lo mismo se aplica cuando la gente se pone de pie en un partido de fútbol o cuando hacen sus gestiones a cámara lenta habiendo una larga cola de personas detrás.

Cuando un gran número de individuos anónimos son jugadores de estos dilemas sociales, Kant y tu madre tienen razón al predecir que las cosas van a ir mal si todos responden a sus incentivos individuales. Pero exhortar a la gente a comportarse mejor en dichas situaciones raramente resulta eficaz. ¿Por qué tendrías que salir perdiendo por hacerle caso a tu madre mientras el resto de personas ignoran a las suyas?

La Tragedia de los Comunes

Los dilemas sociales diarios antes descritos resultan irritantes, pero algunos dilemas sociales representan la vida o la muerte para quienes deben participar en ellos. Un modelo básico ha sido denominado por los politólogos la Tragedia de los Comunes.

Un centenar de familias tienen cabras que pastan en unas tierras comunales. La producción total de leche se maximiza con 1.000 cabras en total. ¿Cuán-

tas cabras tendría que tener cada familia para maximizar su propia producción de leche?

A primera vista, la respuesta parece ser diez, pero para cada familia no es un equilibrio tener diez cabras. Si todas las demás familias tienen diez cabras, la estrategia óptima de tu familia no consiste en hacer lo mismo. Saldrías ganando si tuvieras una cabra más pastando, porque tu familia obtendría todos los beneficios de criar una cabra más mientras que sus costes en términos de una menor hierba para que coman las otras cabras se compartirían con toda la comunidad. Por consiguiente, las familias añadirían cabras adicionales a su rebaño hasta que las tierras comunales se redujeran a un desierto. Pero este resultado es verdaderamente ineficiente.

La Tragedia de los Comunes capta la lógica de todo un espectro de desastres medioambientales que hemos causado nosotros mismos: el desierto del Sáhara se expande imparablemente hacia el sur, en parte porque los pueblos ganaderos que viven en sus límites explotan los prados restantes más allá de lo recomendable; emitimos a la atmósfera dióxido de carbono sin pensar en el futuro; envenenamos nuestros ríos; abarrotamos las carreteras con coches; talamos las selvas; hemos saqueado los recursos pesqueros hasta que algunas poblaciones de peces han alcanzado un nivel del que nunca van a recuperarse.

Los teóricos de los juegos reciben muchos palos por negar que el comportamiento individual que conduce a estos desastres sea irracional. Nuestros

detractores preguntan cómo puede ser posible que sea racional que una sociedad diseñe su propia ruina. ¿Es que no nos damos cuenta de que todo el mundo estaría mejor si todos utilizáramos en menor proporción los recursos comunes? El error de este razonamiento es elemental. Un jugador del juego humano no es una entidad abstracta llamada «todo el mundo». Somos todos individuos separados, cada uno con sus propios objetivos y propósitos. Aun cuando nuestra capacidad para el amor nos lleva a hacer sacrificios por otras personas, cada uno lo hace a su manera y por sus propias razones. Si fingimos lo contrario, no hay esperanza de lidiar alguna vez con la Tragedia de los Comunes.

El Juego de la Caza del Ciervo

Jean-Jacques Rousseau, el profeta de la Revolución Francesa, aceptaba que los juegos políticos raramente son juegos de coordinación pura. Su solución consistía en convertirlos en juegos de coordinación pura modificando nuestras preferencias: «Si pudieras ver cumplida la voluntad general, conduce todas las voluntades particulares a la conformidad con ella».

Los teóricos de los juegos pasan por alto lo poco práctico que resulta este programa radical y, en su lugar, se centran en su parábola de la Caza del Ciervo. Alice y Bob se ponen de acuerdo en cooperar en

la caza de un ciervo, pero cuando se separan para poner en práctica su plan, cada uno puede verse tentado a abandonar la empresa conjunta por la perspectiva de cazar una liebre por sí solo.

Sólo son necesarios ligeros cambios en la versión «dar o tomar» del Dilema del Prisionero de la Figura 7 para obtener el Juego de la Caza del Ciervo de la Figura 18, pero son suficientes para que ambos conviertan la estrategia *paloma* en un equilibrio de Nash.

Por lo tanto, el Juego de la Caza del Ciervo no parece ser un juego de los que crean un dilema social. Si nos encontramos situados en el equilibrio de

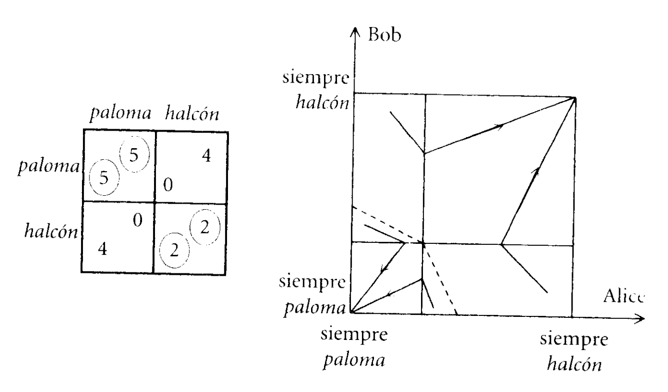


FIGURA 18. El Juego de la Caza del Ciervo. El diagrama de la derecha muestra que la cuenca de atracción del equilibrio de Nash (*paloma, paloma*) es mucho menor que la cuenca de atracción del equilibrio de Nash (*halcón, halcón*). La cuenca de atracción del equilibrio de Nash mixto en el cual *paloma* se elige dos tercios de las veces es solamente la línea de puntos.

Nash ineficiente en el que tanto Alice como Bob juegan *halcón*, podemos cambiar al equilibrio de Nash en el que ambos juegan *paloma*. No obstante, los pagos del Juego de la Caza del Ciervo han sido elegidos para hacer que la realización de dicho cambio sea difícil de conseguir.

La cuenca de atracción del equilibrio ineficiente es grande, y la del equilibrio eficiente es pequeña. Por eso es difícil que la evolución nos aleje de la cuenca de atracción del equilibrio ineficiente y nos introduzca en la cuenca de atracción del equilibrio eficiente. Es cierto que no somos animales que tengan que esperar a las lentas fuerzas de la evolución para establecer una nueva convención; podemos hablar los unos con los otros y acordar un cambio en nuestra forma de hacer las cosas. Pero ¿podemos confiar los unos en los otros para honrar el acuerdo al que podamos llegar?

Algunos expertos en relaciones internacionales emplean el Juego de la Caza del Ciervo bajo el nombre de Dilema de la Seguridad o Juego del Seguro, para llamar la atención sobre los problemas que pueden surgir cuando los jugadores son racionales.

Supongamos que la convención actual consiste en jugar *halcón*, pero Alice intenta persuadir a Bob de que planea optar por *paloma* en el futuro y que, por lo tanto, él debería seguir su ejemplo. ¿Le convencerá? Los teóricos de los juegos creen que no. La razón es que independientemente de lo que piense jugar Alice en realidad, está interesada en persuadir a Bob

de que juegue *paloma*. Si tiene éxito, conseguirá 5 en lugar de 0 si piensa jugar *paloma* y 4 en lugar de 2 si piensa jugar *halcón*. Por lo tanto, la racionalidad por sí sola no permite a Bob deducir nada sobre el plan de acción de Alice, por lo que ella dice, ¡porque va a decir lo mismo independientemente de lo que planee en realidad! Realmente, Alice puede pensar que es poco probable persuadir a Bob de no jugar *halcón* y, por lo tanto, tener pensado jugar *halcón* ella misma, pero aun así intentar persuadirlo de jugar *paloma*.

¿Confianza?

Esta maquiavélica historia muestra que atribuir racionalidad a los jugadores no basta para resolver el problema de la selección de equilibrios, ni siquiera en un caso aparentemente transparente como es el del Juego de la Caza del Ciervo. La respuesta estándar consiste en preguntar por qué los teóricos de los juegos insisten en que es racional para los individuos confiar los unos en los otros. ¿No estarían tanto Alice como Bob mejor si ambos tuvieran más fe en la honestidad del otro?

Nadie niega que Alice y Bob estarían mejor si confiaran el uno en el otro, ni tampoco afirman los teóricos de los juegos que la confianza sea irracional. Solamente dicen que no es racional confiar en las personas sin una buena razón: que no se puede con-

fiar en la confianza. Por ejemplo, ningún napolitano confiará en que los conductores de su ciudad empezarán a respetar las señales de tráfico sólo porque alguna autoridad les diga que deberían hacerlo.

Así que, ¿cómo podremos conseguir desplazarnos de un equilibrio a otro? La caída del imperio soviético nos proporciona un caso magnífico. Algunos países de Europa oriental siguieron con éxito el ejemplo de Suecia en el Juego de la Conducción al cambiar de una economía planificada a una de mercado más o menos de la noche a la mañana; de este modo minimizaron las posibilidades de que los problemas acabaran fuera de control, como en la Rusia de Gorbachov, mientras el sistema estaba desequilibrado durante el interregno.

No obstante, sería igual de erróneo deducir del Juego de la Caza del Ciervo que las transiciones graduales entre convenciones nunca son posibles, como lo sería deducir del Dilema del Prisionero que lo mismo pasa con la cooperación racional. Ninguno de los juegos es adecuado como modelo de cómo funcionan sociedades enteras. No son más que modelos básicos diseñados para formular un argumento concreto.

5. Reciprocidad

Si queremos entender a toda una sociedad, no podemos pasar por alto el papel de la reciprocidad, que ha sido identificada por varios filósofos, desde Confucio hasta Hume, como el fundamento de la sociabilidad humana. Si tuvieran razón, todos nosotros estaríamos representando un determinado papel que nos permite mantener una compleja red de relaciones recíprocas con todos aquellos que nos rodean. Sin embargo, la comprensión que nosotros mismos tenemos acerca de cómo funciona el sistema es tan mala como la física que usamos cuando montamos en bicicleta.

La teoría de juegos da algunas pistas sobre los entresijos de estos entendimientos que se autorregulan. ¿Cómo funcionan?, ¿por qué perduran?, ¿cuánta cooperación pueden sostener?

Juegos repetidos

En un juego de una sola jugada, Alice no puede prometerle a Bob que le rascará la espalda mañana si él le rasca la espalda a ella hoy, porque hemos adoptado el supuesto implícito de que no se encontrarán nunca más. El sistema más simple en el que puede surgir la reciprocidad requiere que los mismos jugadores participen en el mismo juego una y otra vez.

La repetición con un horizonte fijo

El Dilema del Prisionero ejemplifica el hecho de que la cooperación no necesariamente tiene que resultar racional. ¿Desaparece esta desagradable conclusión si Alice y Bob juegan repetidamente? Si de todos es sabido que Alice y Bob van a jugar al Dilema del Prisionero cada día durante la próxima semana, la retroinducción dice que la respuesta es *no*. Se desprecia a los políticos como casos perdidos cuando están a punto de acabar su último mandato en gran parte por la misma razón.

El sábado, el último día de la semana, Alice y Bob estarán jugando al Dilema del Prisionero normal, en el cual lo racional es elegir la estrategia *halcón*. El viernes, por lo tanto, sabrán que nada de lo que hagan ese día puede afectar a lo que hagan mañana. Así que jugarán *halcón* el viernes. Aplicando la retroinducción a lo largo de los diferentes días de la sema-

na, obtenemos el resultado de que los jugadores siempre jugarán *halcón*. También hay equilibrios de Nash que no son de perfección en el subjuego, pero en todos los casos requieren que en el camino de equilibrio se juegue *halcón*.

Repetición indefinida

¿Debe concluirse que la cooperación racional es imposible aunque el Dilema del Prisionero se repita? Sería una conclusión precipitada, porque no resulta realista suponer que Alice y Bob están seguros de que nunca volverán a interactuar después del próximo sábado. En la vida real, las relaciones casi siempre tienen una duración indefinida. Así que, ¿qué pasa en un Dilema del Prisionero repetido en el que no se sabe que Alice y Bob no volverán a encontrarse? La respuesta es que la cooperación racional ahora sí es posible.

En el modelo básico más simple, Alice y Bob siempre creen que existe una cierta probabilidad positiva de que vuelvan a jugar al Dilema del Prisionero como mínimo una vez más, independientemente de cuántas veces hayan jugado en el pasado. Si la probabilidad es lo suficientemente alta y los jugadores valoran lo suficiente sus pagos futuros, el juego repetido tendrá muchos equilibrios de Nash. En algunos de ellos, siempre se elige *paloma* en el camino de equilibrio.

Para entenderlo, basta con observar la Estrategia del Gatillo, la cual requiere que Alice siempre juegue *paloma* en el Dilema del Prisionero repetido indefinidamente, a menos que Bob juegue *halcón* alguna vez. Si éste elige *halcón*, la Estrategia del Gatillo establece que, como represalia, la propia Alice debería cambiar permanentemente a *halcón*. Si ambos jugadores emplean la Estrategia del Gatillo, ninguno provocará que el otro juegue *halcón*, de modo que ambos emplearán *paloma* todo el rato. Pero ¿es el par *(Gatillo, Gatillo)* un equilibrio de Nash?

Todas las mejores respuestas a la Estrategia del Gatillo le dicen a Bob que nunca sea el primero en jugar *halcón*. Si lo hace, la mejor serie de pagos que podría conseguir en el futuro es 3, 1, 1, 1, ..., que es mucho peor que la serie de pagos 2, 2, 2, ..., que es la que consigue jugando siempre *paloma*. Como la Estrategia del Gatillo siempre indica la jugada *paloma* cuando se enfrenta a sí misma, se deduce que la elección de la Estrategia del Gatillo por parte de Bob es la mejor respuesta a la elección de esta misma estrategia por parte de Alice.

Dado que lo mismo se le aplica a Alice, la pareja *(Gatillo, Gatillo)* constituye un equilibrio de Nash del Dilema del Prisionero repetido de manera indefinida.

Castigo

Los detractores que equivocadamente creen que la teoría de juegos niega que la gente sea altruista por naturaleza a veces se ofenden ante la idea de que supuestamente la cooperación no puede funcionar sin la amenaza de un castigo. En especial, les desagrada la Estrategia del Gatillo porque castiga cualquier desviación del camino de equilibrio con una determinación implacable.

Dichos críticos tienen razón en la medida en que la amenaza de castigo es intrínseca a la cooperación *recíproca*. Si Alice le cuenta a Bob que le rascaría la espalda si él se la rascara a ella, la implicación es que ella no se la rascaría si él no fuera a rascársela a ella. Normalmente la gente no proporciona un servicio a menos que esperen conseguir algo a cambio. Si el servicio no se ve recompensado, se acabará. A veces, en su lugar se da un «deservicio». No obstante, en la vida real los castigos extravagantes como los que comporta la Estrategia del Gatillo sólo se pueden encontrar en circunstancias extremas. Los castigos de cada día normalmente son más proporcionales al delito.

Estamos tan acostumbrados a responder apropiadamente a los pequeños castigos provocados por nuestras pequeñas transgresiones que raramente nos damos cuenta lo más mínimo de ello. Las señales subliminales de los que nos rodean se traducen automáticamente en comportamiento sin control



FIGURA 19. Chimpancés limpiándose recíprocamente.

consciente alguno. Por lo general, no hay que blandir ningún palo, pues la mayor parte del tiempo se retira un poco la zanahoria: nos dan un poco la espalda, los saludos son impercetiblemente más malhumorados, las miradas se dirigen a otra parte... Todas estas son advertencias que pasas por alto peligrosamente, pues señalan que lo que sigue es una exclusión social más grave, a menos que te enmiendes.

¿Altruismo?

El hecho de que los teóricos de los juegos piensen que hay más cooperación recíproca de la que normalmente se percibe no implica que sostengan que

la cooperación es imposible sin reciprocidad. Si la gente tiene unas preferencias suficientemente altruistas, la cooperación racional deja de ser problemática, incluso en juegos de una sola jugada. Por ejemplo, si Alice y Bob tienen preferencias utilitaristas que les hacen ambicionar la maximización de la suma de los pagos de ambos en lugar de sus propios pagos individuales, sería un equilibrio de Nash que los dos eligieran *paloma* en el Dilema del Prisionero. Nos encontraremos exactamente en esta tesitura cuando Alice y Bob sean gemelos idénticos en el Juego del Halcón y la Paloma del Capítulo 8.

En qué medida las personas se preocupan las unas de las otras es una cuestión empírica de la cual la teoría de juegos necesariamente permanece al margen. De acuerdo con mi punto de vista personal, aunque obviamente el cóctel humano contiene algo más que una cantidad ínfima de doctores Jeckyll, no me uniría a la utopía que niega la existencia de Mr. Hyde.

Dichas utopías en ocasiones funcionan lo suficientemente bien para empezar, pero la dulzura y la luz originales se erosionan notoriamente a medida que los jugadores responden inconscientemente a sus incentivos. Tenemos el ejemplo de un comisionado de la IRS (Departamento de Tesorería del gobierno de los Estados Unidos) que explicaba por qué una encuesta mostró que el porcentaje de ciudadanos que estaban de acuerdo con defraudar impuestos subió del 11 al 17% en los cinco años anteriores:

«Se trata de un sentido básico de la justicia. Alguien ahí fuera cumple con la ley, ve que los demás hacen cosas y, con el paso del tiempo, se siente imbécil» (Mark Everett en *USA Today*, 8 de abril de 2004). Así que el IRS continúa inspeccionando bajo el supuesto de que casi todo el mundo acabará por encontrar una excusa para defraudar, a menos que no se ofrezcan los incentivos negativos adecuados.

El Teorema Popular

¿Pueden estrategias distintas de la del Gatillo sostener la cooperación racional en un Dilema del Prisionero repetido indefinidamente? ¿Qué hay de la cooperación racional en otros juegos repetidos?

Aunque la respuesta de la teoría de juegos a estas cuestiones se llama Teorema Popular, no hay ningún profesor llamado «Popular». Después de que Nash publicara sus ideas sobre el equilibrio, Bob Aumann descubrió que en el sector todo el mundo parecía conocer las implicaciones para los juegos repetidos y, por lo tanto, decidió que sus propios pensamientos sobre el tema deberían considerarse sabiduría popular.

En 1739, David Hume ya había explicado cómo funciona la reciprocidad, pero no creo que Aumann supiera nada de sus obras. El biólogo Robert Trivers desconocía igualmente las ideas de Aumann cuando las reinventó bajo el encabezamiento de altruismo

recíproco veinte años después. No fue hasta la publicación de *La evolución de la cooperación*, de Axelrod en 1984 cuando la idea finalmente dejó de redescubrirse, de un modo muy similar a como América dejó de ser descubierta después del viaje de Colón en 1492.

El Minijuego de la Confianza

Cuando era un niño, recuerdo que me preguntaba por qué los tenderos entregaban las cosas después de que estuvieran pagadas. ¿Por qué no se limitaban a meterse el dinero en el bolsillo?

Los economistas lo llaman el problema del comprador cautivo. Mi ejemplo favorito es el mercado de diamantes de Amberes. Los comerciantes entregan diamantes de enorme valor para su inspección sin ni siquiera pedir un recibo. ¿Por qué no les engañan? Encontré la explicación más bonita en el *New York Times* del 29 de agosto de 1991. Cuando le preguntaron por qué podía confiar en la honestidad del dueño de la tienda de antigüedades que vendía sus hallazgos a comisión, un tratante nada familiarizado con la Estrategia del Gatillo contestó: «Por supuesto que confío en él. En este negocio, sabes en quién confiar. Los que te traicionan, adiós».

El Minijuego de la Confianza es un modelo básico que hace hincapié en estas cuestiones sobre confianza y reputación. Cuando Alice le presta un servicio a

Bob confiando en que Bob la compensará con un pago a cambio, su situación es esencialmente la misma que en el Juego del Secuestro de la Figura 11. Para saber por qué, vamos a rebautizar la estrategia de *liberar* de Alice como *servicio,* y la estrategia de Bob *callar* como *pagar.*

Dado que el Secuestro tiene un solo equilibrio de perfección en el subjuego, lo mismo ocurre con el Minijuego de la Confianza. Alice no presta el servicio porque predice que Bob no pagará. Pero el Teorema Popular nos indica que todos los pares de pagos de la región del sombreado oscuro de la Figura 20 son equilibrios de Nash del juego *repetido* indefinidamente, incluido el par de pagos (2, 1) que se produce cuando Alice siempre presta el servicio y Bob siempre paga.

Para entender por qué el Teorema Popular funciona, resulta útil preguntarse qué posibilidades se abrirían para Alice y Bob si fueran a negociar por adelantado cómo jugar al Minijuego de la Confianza a una sola ronda. Una posibilidad es que acordaran cualquiera de los tres pares de pagos de la Tabla de la Figura 11. Estos pares de pagos se encuentran en las esquinas del triángulo sombreado de la Figura 20. Los puntos restantes del triángulo pueden alcanzarse como compromisos obtenidos por una moneda lanzada al aire o por establecer turnos. Por ejemplo, el par de pagos resultante del acuerdo entre Alice y Bob de que ella siempre prestará el servicio pero él sólo pagará la mitad de las veces se encuentra a me-

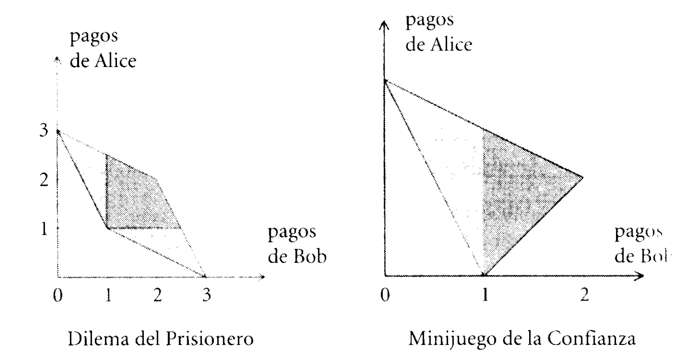


FIGURA 20. Teorema Popular. Las zonas sombreadas muestran las regiones de pagos cooperativos para el Dilema del Prisionero y el Minijuego de la Confianza. Se trata de conjuntos de parejas de pagos que los jugadores podrían acordar si pudiera imponerse el cumplimiento de negociaciones previas al juego. Los triángulos con un sombreado más oscuro muestran las parejas de pagos por juego, cuya existencia –como resultado de equilibrios en las versiones repetidas de los dos juegos cuando los jugadores son lo suficientemente pacientes– demuestra el Teorema Popular.

dio camino entre los pares (0, 2) y (2, 1). Dado que consiste en todos los posibles compromisos acordados por Alice y Bob, el triángulo sombreado se llama «región de pagos cooperativos del Minijuego de la Confianza».

El problema de esta historia de negociaciones es que no funcionará sin algún tipo de agencia externa dispuesta a imponer los contratos que Alice y Bob puedan firmar y que sea capaz de hacerlo. Sin una agencia externa de este tipo, todo acuerdo entre Alice y Bob debe *autorregularse*. Es decir, debe ser ópti-

mo para un jugador respetar el acuerdo en el caso de que los demás también lo hagan. De ello se deduce que sólo los equilibrios de Nash pueden constituir acuerdos viables. Por lo tanto, la única posibilidad para los jugadores racionales de un Minijuego de la Confianza a una sola ronda es el resultado ineficiente en el que Alice no presta el servicio porque Bob no va a pagar. Pero ¿qué ocurre si el juego se repite con una frecuencia indefinida?

En un juego repetido siempre se mantiene como equilibrio de Nash la decisión de jugar el equilibrio de Nash del juego a una sola ronda, pero el Teorema Popular indica que siempre existen muchos equilibrios más. Si los jugadores son lo suficientemente pacientes y la probabilidad de que el juego se juegue en el futuro al menos una vez más es lo suficientemente alta, *cualquier* par de pagos en la región de pagos cooperativos está disponible como equilibrio de Nash, en el caso de que les proporcione a ambos jugadores sus valores minimax o algo más.

El argumento básico resulta tan sencillo que no es ningún misterio por qué fue descubierto por casi todos los que reflexionaron sobre los juegos repetidos después de que Nash publicara su idea de equilibrio en 1951. Tomemos cualquier acuerdo potencial que quede dentro de la región de pagos cooperativos. Para convertirlo en un resultado de equilibrio de Nash solamente es necesario castigar a cualquier jugador que se desvíe de la estrategia a la que deben ceñirse para implementar el acuerdo. Para los fines del

argumento, es más fácil emplear el tipo de castigo implacable característico de la Estrategia del Gatillo, por la cual cualquier desviación se castiga siempre del modo más severo del que se disponga.

¿Cuál es el castigo más severo que Alice puede imponerle a Bob? Lo peor que puede hacerle es obligarlo a limitarse a sus pagos minimax, porque él responderá a los intentos de ella de minimizar sus pagos adoptando la respuesta que los maximice dada la estrategia de castigo adoptada por ella. En el Dilema del Prisionero, el pago minimax para ambos jugadores es de 0. En el Minijuego de la Confianza, el pago minimax de Alice es 1, y el de Bob, 0. Las áreas sombreadas más oscuras muestran, por lo tanto, todos los acuerdos autorregulados de las versiones de repeticiones indefinidas del Dilema del Prisionero y el Minijuego de la Confianza. Ningún acuerdo más puede sostenerse como resultado del equilibrio de Nash.

¿Qué puede ir mal?

Aunque es difícil de demostrar, creo que el Teorema Popular ejemplifica la que quizás sea la intuición más significativa de la que dispone la filosofía política. Establece que no necesitamos una agencia externa que imponga los acuerdos, ya sea real o inventada, para que la cooperación tenga éxito. En una situación repetida, podemos disfrutar todos los be-

neficios de la cooperación si ejercemos de policía de nosotros mismos.

No obstante, el Teorema Popular adolece de una importante limitación. Asume que toda desviación respecto al equilibrio será percibida por el resto de los jugadores. Probablemente no se trate de un mal supuesto si lo aplicamos a los pequeños grupos de cazadores-recolectores en los que empezó a evolucionar la cultura humana. Como ocurre en los pueblecitos de hoy en día, presumiblemente todos lo sabían todo sobre los asuntos de los demás. Pero ciertamente ello no se sostiene en la vida urbana moderna. En el anonimato de una gran ciudad, no es posible detectar y castigar a los que se desvían con la frecuencia necesaria como para disuadir a los transgresores. Hacemos todo lo que podemos con cámaras de vigilancia en circuito cerrado, policías, auditores, inspectores de hacienda y similares, pero nadie se atrevería a afirmar que nuestros esfuerzos en este sentido son, ni de lejos, eficaces.

Me gustaría poder decir que los teóricos de los juegos tienen todas las respuestas al problema de la supervisión imperfecta, pero éste sigue siendo en gran medida *terra incognita*, a pesar de los esfuerzos realizados por mucha gente inteligente. Se trata probablemente del área de la teoría de juegos en la que de producirse un mayor progreso, éste brindaría mayores beneficios sociales.

Toma y daca

La mayoría de científicos sociales piensa que todo lo que necesitan saber sobre la reciprocidad se resume en la estrategia de Toma y daca para el Dilema del Prisionero repetido indefinidamente. Ésta establece que el jugador debe empezar con *paloma*, y a partir de entonces copiar la respuesta del otro jugador en la ronda anterior, sea cual sea. Constituye un equilibrio de Nash si tanto Alice como Bob implementan Toma y daca del mismo modo, que es un equilibrio de Nash que ambos llevan a cabo en la Estrategia del Gatillo, pero Toma y daca no castiga una desviación implacablemente. Los pecadores arrepentidos son perdonados cuando vuelven al redil jugando *paloma* de nuevo.

La popularidad del Toma y daca deriva de las Olimpiadas organizadas por Bob Axelrod, en las cuales se invitó a científicos sociales para que enviaran programas de ordenador con estrategias que se enfrentaran entre sí en un Dilema del Prisionero repetido indefinidamente. Después de conocer los resultados de una ronda piloto, los participantes aportaron programas que implementaban 63 del infinito número de estrategias posibles para el juego.

La estrategia más exitosa de la competición fue el Toma y daca. Así que Axelrod siguió simulando el efecto de la evolución trabajando con todas y cada una de las 63 estrategias. Para Axelrod, el hecho de que el Toma y daca fuera el más numeroso de los

programas supervivientes al final de la simulación evolutiva cerró la cuestión, así que procedió a proponer el Toma y daca como posible paradigma de la cooperación humana en todas las situaciones. Al describir sus virtudes, explica:

> Lo que explica el robusto éxito del Toma y daca es su combinación de ser bondadoso, vengativo, indulgente y claro. Su bondad evita que se busquen problemas innecesarios. Su venganza disuade al contrario de persistir en su actitud de defección. Su indulgencia ayuda a restaurar la cooperación mutua. Y su claridad lo hace inteligible para el resto de jugadores, lo que le permite conseguir la cooperación a largo plazo.

Sin embargo, describir el Toma y daca como la estrategia más exitosa en la simulación de Axelrod equivaldría a dorarle la píldora. Seis de las estrategias presentadas a las Olimpiadas sobrevivieron al proceso evolutivo, y, por lo tanto, el verdadero ganador fue la estrategia mixta en la cual las estrategias supervivientes se juegan con la frecuencia con la que aparecían cuando el proceso se estabilizaba. La frecuencia del Toma y daca en esta mezcla de seis estrategias en realidad no era de más de un sexto. Tampoco resulta consistente el limitado éxito del Toma y daca alcanzado en la simulación cuando la población inicial de estrategias variaba. La despiadada Estrategia del Gatillo cosecha unos resultados extremadamente buenos cuando la población inicial de estrategias presentadas no está sesgada a favor del Toma y daca.

Axelrod definió una buena estrategia como aque-lla que nunca es la primera en elegir *halcón*, pero n es cierto que, como él sugiere, podamos confiar en l evolución para generar un buen comportamient. Cuando se permite la entrada de un flujo continu de una pequeña fracción de pringados a los que me-rece la pena explotar, las estrategias malvadas obtie-nen mejores resultados que el Toma y daca. La mas simple de estas estrategias malvadas es lo que po-dríamos llamar Daca y toma, que empieza jugando *halcón* y a partir de entonces cambia de actitud sola-mente si el oponente jugó *halcón* la última vez. Dos estrategias Daca y toma constituyen un equilibrio de Nash en el Dilema del Prisionero repetido indefini-damente, en el cual se alcanza la cooperación sólo después de la primera ronda de juego.

En cuanto a la claridad, la cooperación sólo re-quiere que un mutante sea capaz de reconocer una copia de sí mismo.

Todo lo que queda de la lista de Axelrod es el re-quisito de que una estrategia exitosa sea vengativa. Ésta es quizás la afirmación que más daño ha hecho, porque sólo se aplica a interacciones *por parejas*. Por ejemplo, se dice que la reciprocidad no puede expli-car la evolución de la amistad. Es cierto que las alianzas ofensivas-defensivas de los chimpancés no pueden explicarse mediante una historia de Toma y daca. Si Alice necesita ayuda porque está herida o enferma, sus aliados no tienen incentivos para acu-dir en su auxilio, porque ahora es poco probable que

resulte útil como aliada en el futuro. Cualquier amenaza por su parte de dejar de cooperar será vacua. Pero no tiene por qué ser la parte herida la que castigue al traidor en una interacción entre múltiples personas. Otros estarán observando si Bob abandona a Alice a su suerte y castigarán su deslealtad rechazando establecer alianzas con él en el futuro. Después de todo, ¿quién quiere aliarse con alguien que tiene la reputación de abandonar a sus amigos cuando tienen problemas?

Creo que el entusiasmo por el Toma y daca sobrevive por la misma razón por la que la gente solía afirmar que es racional cooperar en Dilemas del Prisionero de una ronda: quieren creer que los seres humanos en esencia son buenos. Pero la verdadera lección que nos proporcionan las Olimpiadas de Axelrod y muchas simulaciones evolutivas que se han llevado a cabo con posterioridad es infinitamente más tranquilizadora.

Aunque los argumentos de Axelrod sobre el Toma y daca son pretenciosos, su conclusión de que la evolución es susceptible de generar un resultado cooperativo parece ser realmente sólida. Por consiguiente, no hay que fingir que todos somos doctores Jekyll para explicar cómo conseguimos relacionarnos bien con los otros gran parte del tiempo. Incluso una sociedad de señores Hyde puede aprender a coordinarse en un equilibrio eficiente en un juego repetido indefinidamente.

Fenómenos emergentes

A menudo se tacha a los modelos de teoría de juegos sobre las relaciones sociales de reduccionistas porque no hacen referencia a conceptos como la autoridad, la culpa, la cortesía, el deber, la envidia, la amistad, la culpabilidad, el honor, la integridad, la justicia, la lealtad, la modestia, la propiedad, el orgullo, la reputación, el estatus, la confianza, la virtud y demás. Se infiere que la teoría de juegos es una disciplina inhumana que trata a la gente como robots.

Es verdad que, como todas las ciencias exitosas, la teoría de juegos es reduccionista, pero no por ello los teóricos de los juegos piensan que conceptos como los de «autoridad» o «deber» son irrelevantes para el comportamiento humano. Por el contrario, creemos que estos conceptos constituyen fenómenos emergentes que surgen cuando la gente intenta dar sentido a los equilibrios en los que ellos mismos se encuentran interactuando en el juego de la vida.

Por ejemplo, la explicación popular del equilibrio en el que Alice siempre le presta un servicio a Bob y Bob siempre paga en el Minijuego de la Confianza es que Bob no puede permitirse perder su reputación de honesto engañando a Alice, porque en ese caso ella rehusaría prestarle más servicios en el futuro. En la práctica, Bob a menudo será alguien nuevo, pero el mismo equilibrio funciona igual de bien, porque, como Alice, nadie estará dispuesto a hacer negocios con alguien que tenga reputación de moroso.

Lejos de negar estas historias, la teoría de juegos ofrece una explicación pormenorizada de por qué a veces funcionan y por qué otras veces no funcionan. Por ejemplo, nuestros detractores afirman que estamos equivocados sobre el Minijuego de la Confianza porque la gente sigue pagando, aunque se trate de juegos a una sola ronda en los que la reputación de honestidad es irrelevante. Pero creo que, presumiblemente, cada vez más las estaciones de servicio te hacen pagar la gasolina por adelantado porque han experimentado demasiado a menudo el equilibrio de perfección en el subjuego en el Minijuego de la Confianza a una ronda como para querer seguir jugando.

Autoridad

David Hume nos dice que la autoridad de los papas, presidentes, reyes, jueces, policías y demás sólo es una cuestión de convenciones y costumbres. Alice obedece al rey porque es la costumbre; y la costumbre sobrevive porque el rey le ordenará a Bob que castigue a Alice si no obedece. Pero ¿por qué cumple Bob la orden de castigar a Alice? En resumen, ¿quién vigila a los vigilantes?

La teoría de juegos responde a esta antigua pregunta demostrando que hay una versión del Teorema Popular que no solamente se sostiene para los equilibrios de Nash, sino también para los equili-

brios de perfección en el subjuego. Cuando se establece uno de estos equilibrios, siempre resulta *óptimo* castigar todo comportamiento que se desvíe de él y nos conduzca a un subjuego ajeno al camino de equilibrio. Si te desvías tratando de evadir los costes de castigar a alguien que se desvía, nos llevarás a otro subjuego en el que es óptimo para algún otro jugador castigarte. Si no lo consigue, tendremos un subjuego adicional, y así hasta el final.

Immanuel Kant creía inocentemente que contemplar estas cadenas de responsabilidad equivale a iniciar una regresión infinita, pero el Teorema Popular muestra que las cadenas de responsabilidad pueden cerrarse entre sí. Con sólo un número finito de jugadores, dichas cadenas de responsabilidad se cierran necesariamente de un modo que Kant no tuvo en cuenta. Alice obedece al rey porque teme que en caso contrario Bob la castigue. Bob cumpliría la orden de castigar a Alice porque teme que en caso contrario Carol le castigase a él. Carol cumpliría la orden de castigar a Bob porque teme que en caso contrario Alice la castigaría a ella.

A primera vista, una espiral como ésta de creencias que se confirman por sí mismas parece demasiado frágil para sostener algo sólido. Es cierto que las creencias giran en círculo, pero el Teorema Popular muestra que su fragilidad es una ilusión, ya que el comportamiento generado por las creencias mantiene en funcionamiento un equilibrio de perfección en el subjuego.

Deber

Los antropólogos nos dicen que las sociedades cazadoras-recolectoras puras carecen de estructura de autoridad. Los alimentos se recolectan y distribuyen bajo el principio de que todos contribuyen según sus capacidades y se benefician de acuerdo con sus necesidades.

¿Cómo puede sobrevivir un contrato social como éste? Si sólo estuviera disponible el mecanismo del Toma y daca, ¿por qué compartiría alguien alimentos con gente carente de poder ajena a su familia? Sin embargo, el castigo por no compartir no es necesariamente administrado por aquel que pasa hambre. En grupos modernos de recolectores, se une todo el grupo para castigar al transgresor.

Para entender cómo puede funcionar un sistema de este tipo, imaginémonos un modelo de mundo en el cual sólo están vivas a la vez una madre y una hija en un momento dado. Cada jugador vive durante dos periodos. El primero es el de su juventud, el segundo el de su vejez. En su juventud, un jugador hornea dos hogazas grandes de pan. Entonces da a luz una hija e inmediatamente envejece. Los jugadores viejos son demasiado débiles para trabajar y, por lo tanto, no producen nada.

Un equilibrio requiere que cada jugador consuma sus dos hogazas de pan en su juventud. En ese caso, todos tendrán que aguantar una vejez miserable, pero todos estarán haciendo lo óptimo dadas las de-

cisiones de los demás. Todos los jugadores prefe rían consumir una hogaza en su juventud y otra su vejez. Pero este resultado «justo» sólo puede a canzarse si todas las hijas les dan una de sus dos h gazas a sus madres, ya que el pan se echa a perder no se consume al salir del horno.

Las madres no pueden vengarse si sus hijas so egoístas, pero, no obstante, el resultado justo pued sostenerse como equilibrio. En este equilibrio just un conformista es un jugador que le da a su madr una hogaza solamente si su madre fue conformist en su juventud. Por consiguiente, los conformist premian a los demás conformistas y castigan a los n conformistas.

Para entender por qué una hija le da a su mad una hogaza, supongamos que Alice, Beatrice y Car son madre, hija y nieta. Si Beatrice desatiende a Al ce, se convierte en no conformista. Por lo tanto, C rol castiga a Beatrice para evitar convertirse a su v en no conformista. Si no, será castigada por su hija así sucesivamente. Si el primer jugador en nacer considerado un conformista, ser conformista convierte para todos en un equilibrio de perfecci en el subjuego. No obstante, el que está herido no nunca la persona que castiga una infracción del co trato social. En realidad, el herido está muerto cua do llega el momento de castigar al infractor.

En la vida real, se dice que las hijas tienen el *deb* de cuidar a sus indefensas madres. El modelo mu tra cómo dicho deber puede ser honrado en

mundo racional aunque todas las hijas sean egoístas de corazón duro.

El papel de las emociones

En algún momento, las emociones fueron desestimadas como impulsos sobrantes de nuestra historia evolutiva. Las emociones que surgen socialmente y que se asocian con el orgullo, la envidia y la ira todavía se incluyen entre los siete pecados capitales. Pero si dichas emociones son tan autodestructivas como mantiene la tradición, ¿por qué nos ha dotado de ellas la evolución? Comparto el punto de vista hoy extendido de que la tradición se equivoca totalmente al considerar que nuestras reacciones emocionales carecen de un papel útil para los acontecimientos sociales.

Por ejemplo, el escenario prototipo de una expresión de ira surge cuando Alice trata a Bob injustamente. Dada su ira ante la injusticia por ella cometida, es probable que Bob le cause algún daño. Por lo tanto, Alice se afana en mantener bajo control sus instintos codiciosos, no sea que suscite la ira de Bob.

De este modo, es posible sostener equilibrios eficientes en juegos repetidos sin que ninguno de los jugadores sea consciente de que juegan a un juego repetido. ¿Cómo si no podrían los chimpancés sostener un nivel elevado de altruismo recíproco? ¿Cómo seríamos capaces los humanos de la misma

hazaña si siempre tuviéramos que emplear m
hora o más en calcular qué hacer antes de empr
der una acción? Parte de nuestro pensamiento en
tas situaciones debe de estar, con seguridad, graba
a fuego, y, quizás, lo que se siente cuando nuestro p
loto automático toma el control es que entramos
un estado emocional.

Venganza

Supongamos que Bob se arriesga a hacerse daño
lanzar un ataque contra Alice después de que ella
haya tratado injustamente. El comportamiento d
Bob podría ser tachado de irracional por unos ob
servadores que no se dieran cuenta de que no nec
sariamente está actuando con furia en un juego d
una ronda, sino que puede estar sosteniendo su par
te del equilibrio en un juego repetido indefinida
mente.

Los experimentos con el Juego del Ultimátum
proporcionan en la actualidad un punto de vista so
bre este tipo de confusión. ¿Por qué no aceptan los
sujetos del experimento cualquier cosa que les ofrezcan en las versiones a una sola ronda del Juego del Ultimátum? Una respuesta común es que se enfadan y las rechazan por resentimiento. El análisis de los niveles de testosterona en sus esputos parecería confirmar que esta explicación es correcta, por lo visto hasta ahora.

Pero ¿por qué se enfadan los participantes? Creo que lo hacen porque es su respuesta habitual a una oferta injusta en situaciones que implican un ultimátum en la vida real. Este comportamiento sobrevive en situaciones repetidas porque sirve para guardar un equilibrio. Se activa en juegos de laboratorio porque inicialmente los jugadores no perciben las diferencias entre el juego de laboratorio y el juego de la vida al que están habituados. Pero de ahí no se deduce que seamos meros robots controlados por nuestras emociones. Normalmente, los sujetos adaptan su comportamiento a los juegos de una ronda que juegan en un laboratorio a medida que adquieren experiencia. En el Dilema del Prisionero, no hacen falta más que cerca de diez intentos para que el 90% de los jugadores aprenda que inclinarse por *paloma* no tiene sentido en un juego de una sola ronda, no repetido.

6. Información

En un juego de información perfecta como el Ajedrez, los jugadores siempre saben todo lo que ha pasado anteriormente en el juego. Cuando la información es imperfecta, debemos conocer lo que saben los jugadores a medida que avanzan por el árbol de decisión. Von Neumann nos enseñó a hacerlo mediante la simple idea de un conjunto de información.

La Figura 21 muestra dos formas de expresar un juego de movimiento simultáneo, como el Juego de las Monedas, como un árbol con conjuntos de información. No importa qué jugador mueve el primero si el jugador que mueve el segundo no conoce la decisión tomada por el primer jugador, así que podemos hacer que comience tanto Alice como Bob. Cuando Alice empieza el juego, incluimos los dos nodos de decisión de Bob en un conjunto de información para indicar que cuando mueve no sabe si se encuentra en el nodo izquierdo o en el derecho.

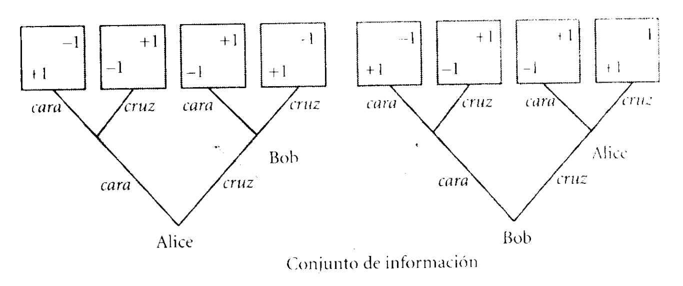


FIGURA 21. Información del Juego de las Monedas. Un jugador no puede distinguir entre dos nodos de decisión contenidos en el mismo conjunto de información. Los pagos de Alice se encuentran siempre en la esquina inferior derecha de las cajas.

Cuantos más conjuntos de información incluyamos en un juego de forma extensiva, menor será su forma estratégica. La razón radica en que una estrategia pura solamente especifica una acción para cada uno de los conjuntos de información de los jugadores, no para cada uno de los nodos de decisión que contiene.

Si eliminháramos el conjunto de información en la versión del Juego de las Monedas en la que Alice juega primero, Bob tendría 4 = 2 × 2 estrategias puras, cada una de las cuales especifica la elección de una de sus dos acciones para cada una de las dos acciones de Alice. Con el conjunto de información, no puede hacer sus acciones contingentes respecto a las acciones de Alice, porque no tiene información sobre éstas. Así que sólo dispone de dos estrategias puras, una para cada una de sus acciones.

Póquer

El arquetipo de juego con información imperfe es el Póquer. Al contrario que el Ajedrez, pode resolver versiones simples del Póquer explí mente.

Lo que me convirtió en un teórico de los jue fue el análisis del Póquer que hizo Von Neumann. sabía que los buenos jugadores de Póquer se ti muchos faroles, pero simplemente no me creía q pudiera resultar óptimo hacerlos tantas veces co afirmaba Von Neumann. ¡Tendría que habérme pensado dos veces antes de dudar del maestro! De pués de muchos cálculos farragosos, no sólo tu que admitir que él tenía razón, sino que me encon tré enganchado a la teoría de juegos sin remedio po siempre jamás.

No obstante, te vas a llevar una decepción si espe ras hacerte rico jugando una estrategia maximin en la mesa de Póquer. Los participantes en el Campeo nato Mundial de Póquer de Las Vegas juegan de un modo más parecido al que recomienda Von Neumann que los amateurs como tú y como yo, y los jugadores legendarios, como el gran Amarillo Slim, no triunfaron por jugar de acuerdo con el teorema minimax.

No se trata sólo de que jugar la estrategia maximin te pueda ofrecer un beneficio medio no mayor de cero en un juego justo, sino que sería casi tan entretenido como mirar cómo se seca una pintura.



FIGURA 22. Full.

Por ejemplo, si Alice recibiera cuatro ochos al jugar con Bob al póquer sin descartes, su estrategia maximin le indicaría que debe subir la apuesta cuatro veces, pero ¡retirarse si Bob sube la suya una vez más! Para ganar dinero en una mesa de póquer de verdad hay que ser mucho más emprendedor; debes buscar activamente las debilidades psicológicas de tus contrincantes y sacar partido de ellas. No obstante, a menos que seas un maestro natural de la psicología humana como Amarillo Slim, ¡es probable que tus inocentes intentos por explotar las debilidades de los demás acaben con los demás explotando las tuyas!

Ir de farol

No te preocupes si no conoces la diferencia entre una escalera de color y un full, o las reglas de apuesta en la variedad «Texas Hold'em». El modelo básico de Von Neumann se abstrae más allá de todas estas complicaciones.

Tanto Alice como Bob reciben un número entre 0 y 1. Ambos tienen el objetivo de maximizar sus

ganancias medias de dólares bajo el supuesto de que todos los números tienen la misma probabilidad de ser entregados a tu oponente, independientemente de lo que tú recibas. De este modo, si Alice recibe un 0,667, piensa que tiene aproximadamente el doble de posibilidades que Bob de tener la carta más alta.

Antes del reparto, cada jugador pone una apuesta de 1 dólar en el bote. Después del reparto de cartas, hay una ronda para apostar, durante la cual Bob puede retirarse. Si se retira, Alice se lleva el bote, independientemente de quien tenga la mejor mano. Si Bob no se retira, se muestran las cartas y, a continuación, el jugador con la carta más alta gana el bote. Se muestran las cartas cuando Bob «ve» la apuesta de Alice igualando su contribución total al bote con la de ella.

El modelo de Von Neumann restringe estrictamente las posibilidades de subir la apuesta. Primero, Alice puede o pasar (no añade nada al bote) o subir la apuesta (añade 1 dólar al bote). Si pasa, Bob debe ir. Si Alice sube la apuesta, Bob tiene elección, puede retirarse o ir.

La Figura 23 muestra las estrategias maximin de los jugadores en el modelo de Von Neumann. Todos los que juegan al Póquer de andar por casa saben que a veces Alice tiene que subir la apuesta con manos malas o Bob sabrá que nunca debe ir cuando ella tiene una buena mano. Los amateurs intentamos alcanzar un compromiso tirándonos faroles

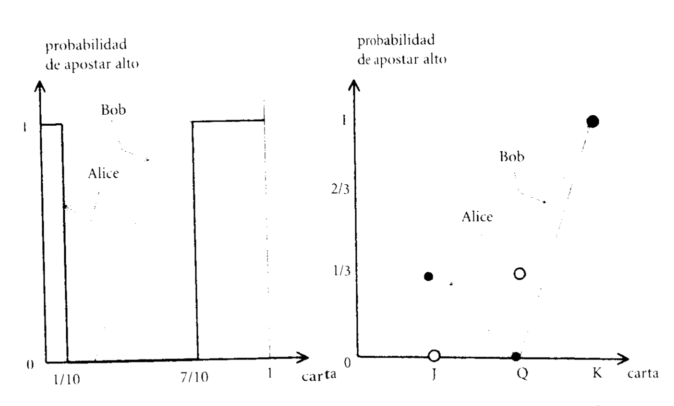


FIGURA 23. La jugada maximin en el modelo de Póquer de Von Neumann. El gráfico de la izquierda muestra el modo en que la probabilidad con la que Alice y Bob deberían apostar alto varía en función de la mano que tengan. Sólo se muestra una de las muchas estrategias óptimas de Bob. El gráfico de la derecha muestra que la jugada óptima de nuestra versión simplificada tiene un carácter similar.

con manos medias, pero la estrategia maximin no es tan tímida. Si quieres jugar al Póquer contra buenos oponentes y acabar sin pérdidas ni ganancias, ¡ve de farol mucho y con manos realmente malas! Lo bueno de los faroles no es tanto que puedas ganar con una mano mala como que quieras animar a tus oponentes a subir la apuesta con manos medias cuando tienes una buena mano.

Un modelo todavía más simple

El modelo siguiente simplifica el Póquer todav más al sustituir las cartas numéricas de Von Neu mann por una baraja que contiene sólo el rey, la rei na y la J de corazones. No obstante, la Figura 2 muestra que las estrategias maximin siguen tenien do el aspecto de las del modelo de Von Neumann.

El movimiento aleatorio que inicia el juego en la Figura 24 representa al que baraja las cartas en seis órdenes igual de probables. Alice recibe la carta de arriba de la baraja y Bob la segunda. El resto del ár bol del juego muestra las reglas de apuesta de Von Neumann aplicadas a la nueva baraja de cartas.

El árbol de decisión tiene un aspecto tan impre sionante que probablemente te sorprenderá descu brir que sabes todo lo necesario para resolver el juego. En primer lugar, borra las estrategias domi nadas engrosando las ramas que son obviamente mejores que su alternativa. Por ejemplo, Alice tendría que pasar cuando tiene la reina, porque Bob sólo va cuando lo tiene seguro. Por lo tanto, únicamente quedan en duda dos decisiones. ¿Alice irá de farol cuando tenga una jota? ¿Bob va cuando tiene una reina?

La Figura 25 muestra todas las estrategias puras del juego, pero sólo importa la parte sombreada de la forma estratégica, porque las estrategias que corresponden a la parte sombreada están dominadas. La figura también muestra una ampliación de la

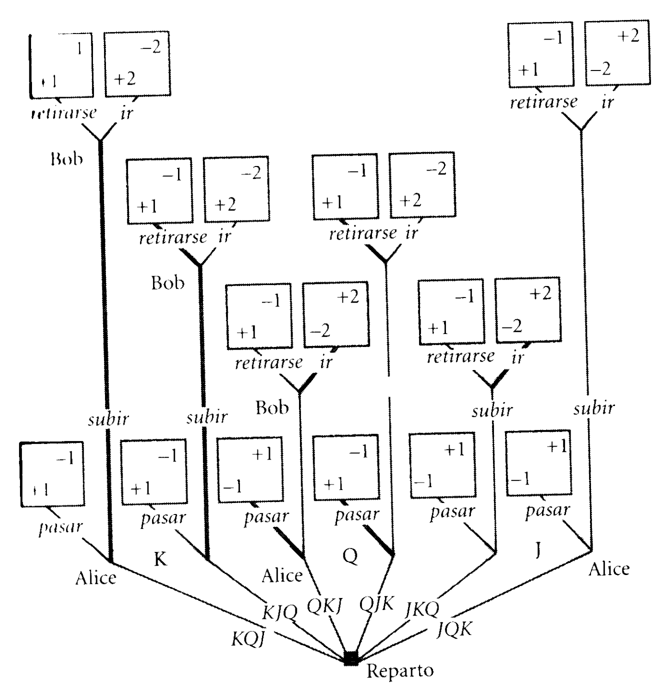


FIGURA 24. Modelo de Von Neumann. Después de que se hayan engrosado líneas para mostrar las acciones dominantes, sólo quedan los casos en los que Alice tiene la jota y Bob la reina.

parte sombreada. Podemos calcular los equilibrios de Nash mixtos encontrando qué estrategias deben emplear Alice y Bob para hacer indiferente a su oponente. Resulta que Alice tendría que jugar *SPS* (subir cuando tiene la J) con una probabilidad de 1/3. Bob debería jugar *IIR* (ir cuando tiene la reina) con una probabilidad de 1/3.

	RRR	RRI	RIR	RII	IRR	IRI	IIR	III
PPP								
PPS								
PSP								
PSS								
SPP								
SPS								
SSP								
SSS								

	IRR	IIR
SPP	0 / 0	1/6 / −1/6
SPS	1/6 / −1/6	−1/6 / 1/6

FIGURA 25. La tabla de pagos del modelo de Póquer de Von Neumann. La estrategia *SPS* de Alice requiere que suba cuando tiene el rey, pase cuando tiene la reina y suba cuando tiene la jota. La estrategia *IRR* de Bob requiere que vaya cuando tiene el rey, se retire cuando tiene la reina y se retire también cuando tenga la jota.

Tipos

De acuerdo con el filósofo Hobbes, el hombre se caracteriza por su fuerza física, sus pasiones, su experiencia y su razón. En la teoría de juegos, la fuerza física de Alice se determina por las reglas del juego; sus pasiones se traducen en sus preferencias y su experiencia en sus creencias. Su razón la lleva a comportarse racionalmente.

Estas cuatro características determinan de qué tipo de jugador se trata. A menos que alguien diga lo contrario, un análisis racional del juego da por supuesto que los tipos a los que pertenecen todos los jugadores son de todos conocidos. Este supuesto tan

importante a veces se refuerza al afirmarse que la información del juego es *completa*.

¿Cuándo es razonable asumir que la información es completa? Un juego como el Ajedrez no da problemas, ¿pero qué hay del Gallina? ¿Es realmente probable que Alice conozca el grado de aversión al riesgo de Bob con la suficiente precisión como para calcular sus pagos? ¿Qué creerá Bob de los pagos de ella? ¿Qué creerá Alice que Bob cree de sus pagos?

John Harsanyi

Alice no conoce la mano de Bob en el Póquer. Bob no sabe lo que Alice piensa de su mano. Alice no sabe lo que Bob cree que ella cree sobre la mano de él. Y así sucesivamente. Nosotros cerramos esta aparentemente infinita cadena de creencias sobre las creencias asumiendo que el movimiento aleatorio que representa el barajar y el reparto de cartas es conocido por todos. John Harsanyi nos enseñó cómo emplear trucos similares cuando la información es incompleta.

Harsanyi vivió una vida muy agitada para ser académico. Como judío en Hungría, escapó del desastre por los pelos no una vez, sino dos. Habiendo eludido los campos de la muerte nazis, entró ilegalmente en Austria junto a su mujer para escapar de la persecución de los comunistas que sucedieron a aquéllos. Una vez en Occidente, tuvo que construir

su carrera de nuevo desde cero, trabajando en una fábrica en Australia para empezar.

Como muchos intelectos verdaderamente originales, su talento inicialmente no fue reconocido. A los economistas les llevó veinticinco años valorar la ingenuidad de su idea para lidiar con la información incompleta, pero todavía estaba vivo cuando le otorgaron el Premio Nobel en 1994, junto a John Nash y Reinhard Selten, por su trabajo sobre la información incompleta en los juegos. Queda por ver si su también importante trabajo sobre el utilitarismo gozará alguna vez del reconocimiento que merece ahora que está muerto.

Información incompleta

Aunque los economistas hablan de juegos de información incompleta, no existe tal cosa. La teoría de Harsanyi muestra cómo una situación con información completa a veces puede transformarse en un juego de información imperfecta, al que entonces analizamos mediante el concepto de equilibrio de Nash.

Cuando la información es incompleta, el problema suele consistir en que puede haber diferentes tipos de jugadores, con preferencias y creencias diferentes. Harsanyi propuso gestionar este tipo de situación como si a cada jugador le asignaran un tipo, al igual que en el Póquer.

Las características de este movimiento de asignación de tipos deben ser conocidas por todos para que el enfoque de Harsanyi funcione. Los economistas no parecen preocupados por este requisito, pero mi punto de vista es que el método sólo es genuinamente viable cuando se dispone de toda la información, la cual debe ponerse en común en una base de datos conocida por todos y a la que todos puedan acceder.

Ignorancia de una parte en el Gallina

A menudo los hombres de negocios de mediana edad juegan al Gallina cuando conducen coches que avanzan en sentidos opuestos en calles estrechas. En la versión con una parte ignorada que muestra la Figura 26, todo lo referente al juego es conocido por todo el mundo, excepto el mayor pago de Bob, que es el que recibe si acelera cuando Alice va despacio.

Para aplicar el método Harsanyi, hay que imaginarse un movimiento aleatorio que le asigne a Bob un tipo, que en este ejemplo corresponde a su mayor pago. Por lo tanto, una estrategia pura de Bob establece qué acción emprendería dependiendo del tipo de jugador que se le asignara.

Las probabilidades con las que se le asignan a Bob los diferentes tipos están determinadas por las creencias de Alice. Para simplificar las cosas, se asume que de todos es sabido que Alice cree que el tipo de Bob

	despacio	*deprisa*
despacio	3 3	? 0
deprisa	0 4	−1 −1

ignorancia de una parte

	despacio	*deprisa*
despacio	3 3	? 0
deprisa	0 ?	−1 −1

ignorancia de las dos partes

FIGURA 26. Información incompleta en el Juego del Gallina.

puede estar entre 3 y 9, con la misma probabilidad para todos los valores. Si San Francisco de Asís condujera el coche de Bob, pertenecería sin duda al tipo 3, pero ni siquiera Atila el huno tiene un tipo mayor de 9 en este modelo básico.

Los subjuntivos implícitos que forman parte de esta técnica de hacer modelos generan a veces inquietud. Si Bob sabe que no es un santo, ¿por qué debería comportarse como si jugara en un juego en el que podría ser San Francisco de Asís? La razón por la cual es necesario que Bob analice cómo se habría comportado si hubiera sido los tipos que podría haber sido es que *Alice* no sabe cuál de estos tipos se ha hecho realidad. Dado que sus decisiones estratégicas dependen de lo que Bob habría hecho si el tipo al que pertenece fuera otro del que realmente es, Bob no puede decidir qué hacer cuando sabe que su tipo es 4½ o 5¾ sin tomar en consideración a la vez lo

que habría hecho si su tipo fuera cualquier otro de los posibles.

Bob sí sabe a qué tipo pertenece, pero Alice ignora el resultado del movimiento de asignación de tipos. Por lo tanto, ella sólo dispone de dos estrategias, *despacio* o *deprisa*. Bob dispone de un enorme número de estrategias, pero sólo analizaremos aquellas en las que escoge *despacio* si su tipo está por debajo de un valor determinado, y *deprisa* si está por encima.

Previamente hemos localizado tres equilibrios de Nash para el Juego del Gallina: dos puros y uno mixto. El equilibrio puro continúa constituyendo un equilibrio en el juego con ignorancia de una parte. El primer equilibrio corresponde a la convención de *las damas primero:* Alice conduce *deprisa* y Bob *despacio* siempre, independientemente del tipo al que pertenece. El segundo equilibrio corresponde a la convención *los caballeros primero:* Alice siempre va *despacio* y Bob siempre *deprisa.*

Cuando no se dispone de una convención como ésta, como ocurre al conducir con tráfico denso, debemos mirar hacia una analogía del equilibrio mixto del Juego del Gallina, en la cual cada jugador elige *despacio* y *deprisa* con la misma frecuencia. Empezamos haciendo a Alice indiferente entre *deprisa* y *despacio;* entonces, cualquier estrategia mixta le resulta óptima. Bob puede hacer a Alice indiferente si elige *despacio,* si su tipo está entre 3 y 6, y *deprisa* cuando su tipo esté entre 6 y 9. Entonces a Alice le parecerá que Bob elige *deprisa* con la misma frecuencia que

despacio. Pero Alice no debe jugar *deprisa* con la misma frecuencia que *despacio* como en el equilibrio mixto del Capítulo 2, ya que ahora tiene que ser óptimo para Bob cambiar de *despacio* a *deprisa* cuando su tipo es 6. Para que Bob sea indiferente entre *despacio* y *deprisa* cuando su pago máximo es de 6, Alice debe jugar *deprisa* con el triple de frecuencia que *despacio*.

Nótese cómo la ratio de accidentes aumenta cuando hacemos que Alice desconozca a qué tipo corresponde Bob. En el equilibrio mixto de la versión original del Juego del Gallina, tanto Alice como Bob eligen *deprisa* la mitad de las veces, y, por tanto, hay una probabilidad de 1/4 de que ambos conductores aceleren y tengan un accidente. En el correspondiente equilibrio de la versión con ignorancia de una parte, la probabilidad de un accidente aumenta hasta 3/8.

Ignorancia de dos partes en el Juego del Gallina

El segundo ejemplo de la Figura 26 es más divertido que el primero, ya que en este caso tanto Alice como Bob son ignorantes, pero la simetría del problema lo hace todavía más fácil de analizar.

Seguiremos a Harsanyi una vez más, con la introducción de un movimiento aleatorio que le asigna independientemente a cada jugador un tipo que su adversario considera situado entre 3 y 9, con la mis-

ma probabilidad para todas las opciones. El equilibrio interesante surge cuando tanto Alice como Bob eligen *despacio* cuando su tipo es de menos de 5 y *deprisa* cuando su tipo es de más de 5. Entonces, a ambos jugadores les parecería que su oponente conduce *deprisa* con el doble de frecuencia que *despacio*. Por lo tanto, un jugador con un pago máximo de 5 será indiferente entre elegir *deprisa* y *despacio*. El juego óptimo para Alice y Bob consiste pues en cambiar de *despacio* a *deprisa* cuando su tipo llega a 5.

La probabilidad de un accidente es ahora de 4/9, lo que representa un incremento respecto a la probabilidad de 3/8 del caso de la ignorancia de una parte, pero a continuación vamos a ver que incrementar el nivel de ignorancia puede en ocasiones hacer que los jugadores salgan beneficiados.

¿La ignorancia es una bendición?

Alice y Bob están a punto de llegar al equilibrio de Nash que acabamos de descubrir para el Juego del Gallina, aunque las dos partes lo ignoran. Los dos corresponden a un tipo 4, de modo que ambos planean conducir *despacio*. Por lo tanto, no hay posibilidad de un accidente y cada jugador recibirá unos pagos de 3 útiles.

Pandora es una buena samaritana bien informada que observa que Alice y Bob basan sus elecciones

estratégicas en una premisa falsa. Cada uno se comporta como si su oponente pudiera pertenecer a cualquier tipo entre el 3 y el 9, pero el tipo de su oponente realmente es 4. Por lo tanto, Pandora interviene con una declaración pública que pone en conocimiento de todos que tanto Alice como Bob son de tipo 4. Por consiguiente, Alice y Bob juegan el equilibrio mixto habitual en el Gallina, en el cual cada uno de los jugadores juega *deprisa* la mitad del tiempo y *despacio* la otra mitad. Así que la intervención de Pandora incrementa la probabilidad de un accidente hasta 1/4 y reduce los pagos medios de Alice y Bob a 1½ útiles.

Incrementar la información de todos puede, por lo tanto, perjudicar a todo el mundo. Un mayor nivel de información sólo será beneficioso, sin matices, para un jugador si lo adquiere secretamente. Por lo tanto, si Pandora le contara *en secreto* a Alice cómo es el juego en realidad, Alice cambiaría de *despacio* a *deprisa* y sus pagos mejorarían desde 3 hasta 4 útiles.

La conclusión de que revelar información puede dañar a la sociedad da pie a una importante cuestión ética. ¿Debería ser legítimo que los políticos nos ocultaran la verdad por nuestro propio bien? John Stuart Mill es quizás el más benigno de una serie de filósofos, desde Platón en adelante, que han contestado *sí* a esta pregunta, pero mi opinión es que *no*. Mantengo la boca cerrada cuando sé que alguien está siendo infiel en su matrimonio, pero quiero que

la gente considere correcto tirar de la manta en la esfera pública. Las mentiras que supuestamente contribuyen al interés público normalmente demuestran beneficiar únicamente a los mentirosos que las dicen.

Dando señales sobre nuestro tipo

Cuando la gente juega al Gallina en la vida real, busca pistas que puedan señalar el tipo de su oponente. ¿Alice conduce una camioneta *pick-up* abollada? ¿Lleva Bob un collar de perro?

Para señalar el tipo del jugador con eficacia, una señal debe ser costosa de realizar. Si a Alice le dan una pareja de doses en el Póquer, no le ayudará decirle a Bob que le han tocado cuatro ases. Los teóricos de los juegos desprecian esta palabrería inútil y la tachan de *cheap talk* («parloteo»). Bob sólo prestará atención si Alice respalda sus palabras con dinero. Pero si ella se marca un farol apostando como si tuviera cinco ases, se arriesga a que vayan y pierda la apuesta.

Volviendo al Juego del Gallina con ignorancia de las dos partes, supongamos que tanto Alice como Bob pueden lanzar simultáneamente una señal costosa que diga «pertenezco a un tipo alto, cuidado conmigo». Si algunos tipos mandan su señal para poner de manifiesto su fuerza, permanecer callado se convierte en un signo de debilidad. Por consi-

guiente, debemos contemplar un nuevo juego en el cual ambos jugadores tengan una oportunidad estratégica de emitir una señal de fortaleza o debilidad antes de jugar al Gallina. Analizamos un equilibrio de perfección en el subjuego determinado, en el cual los jugadores cuyo tipo sobrepasa el 5 lanzan una señal de fuerza, mientras que los que su tipo es menor de 5 lanzan una señal de debilidad.

Si Alice afirma que es fuerte mediante una señal y Bob admite implícitamente que es débil al permanecer callado, el equilibrio requiere que jueguen al Gallina de acuerdo con la norma: las damas primero. Es decir, Alice va *deprisa,* y Bob, *despacio.* Si Bob lanza la señal y Alice no, juegan de acuerdo con la norma los caballeros primero. En ese caso, Bob va *deprisa* y Alice *despacio.*

El caso más interesante surge cuando la señal la lanzan los dos o ninguno de los dos. Ya hemos visto cómo analizar las versiones resultantes del Juego del Gallina con ignorancia de las dos partes. En el caso de que ambos emitan una señal, es bien sabido que ambos tipos están entre 5 y 9. Entonces, el equilibrio de Nash consiste en que los jugadores con un tipo menor de 6 elijan *despacio* y los jugadores con un tipo mayor de 6 elijan *deprisa.* En el caso de que ninguno de los dos mande una señal, es bien sabido que ambos tipos se encuentran entre 3 y 5. Entonces se llega a un equilibrio de Nash si los jugadores con un tipo por debajo de 4 eligen *despacio* y los jugadores con un tipo superior a 4 eligen *deprisa.*

Sólo en la última fase surgen nuevas consideraciones. Emitir la señal debe ser opcional para los jugadores cuyo tipo es mayor de 5 y permanecer en silencio debe serlo para aquellos cuyo tipo es menor de 5. Un jugador cuyo tipo sea exactamente de 5 será entonces indiferente entre emitir o no la señal. Por consiguiente, debemos calcular qué espera conseguir un jugador de tipo 5 en los dos casos. Para que se sostenga el equilibrio, el coste de afirmar que eres duro debe ser igual a la diferencia entre estos dos pagos. La diferencia resulta ser de 2 1/6 útiles y, por lo tanto, el costo de una señal tiene que ser de 2 1/6 para que el equilibrio funcione.

Exhibiciones

Una señal costosa es de una gran importancia a la hora de negociar. El retraso se usa mucho con este fin. Por ejemplo, durante una huelga, a veces hay quejas sobre la irracionalidad de los representantes sindicales que no piensan considerar la última oferta hasta dentro de dos martes. Sin duda los representantes sindicales a veces son irracionales, pero unos jugadores racionales pueden emplear exactamente la misma táctica para enviar una costosa señal de fortaleza. En su forma más cruda, un negociador puede exhibir su fortaleza simplemente quemando un montón de billetes.

La biología ofrece ejemplos maravillosos. Avishag Zahavi describe señales costosas mediante el Princi-

pio del hándicap. ¿Por qué cantan algunas alond cuando las persigue un halcón? Para enviar la se de que son lo suficientemente rápidas como pa escapar, a pesar de que se reducen sus ventajas m diante el canto. Los halcones jóvenes siguen per guiéndolas, pero pronto aprenden a no molesta se. ¿Por qué tienen los pavos reales unas colas ta magníficas? Parte de la razón radica en una sele ción sexual clarísima. A las pavas reales les gusta las grandes colas, y por lo tanto, los pavos con gra des colas consiguen más hembras. Pero presumibl mente las colas de los pavos empezaron siendo se ñales costosas de la salud de estas aves.

7. Subastas

En esta ocasión, Alice se convierte en una jefa empeñada en conseguir que sus subordinados trabajen por los objetivos de ella en lugar de hacerlo por los suyos propios. En el lenguaje económico, Alice es el principal, mientras que sus subordinados son sus agentes.

Alice les podría decir a sus agentes qué hacer ante todas las contingencias posibles, pero hay dos razones por las que esta economía dirigida resulta notoriamente ineficiente: la primera es que resulta difícil para el principal supervisar a sus agentes para asegurarse de que siguen sus reglas en lugar de hacer lo que les venga en gana. La segunda razón radica en que a menudo los agentes conocen su actividad mejor que el principal.

Diseño de mecanismos

Las reglas que Alice puede supervisar e imponer crean un juego en el que los agentes participan. Persuadir a los agentes para que actúen de acuerdo con los objetivos del principal en lugar de con los suyos propios en situaciones en las que Alice es incapaz de supervisar o que no puede regular por falta de conocimientos supone que ella tiene que inventarse incentivos adecuados para motivar a los agentes. El problema de encontrar un buen sistema de regulaciones e incentivos se llama *diseño de mecanismos*.

La principal intuición que aporta la teoría de juegos es que habría que esperar que la gente cambiara de comportamiento tras la introducción de una nueva reforma; su comportamiento se iría ajustando hasta que finalmente se estableciera un equilibrio de Nash para el nuevo juego. Por lo tanto, cuando Alice evalúa un posible nuevo mecanismo, debería preguntarse hasta qué punto le gusta lo que pasará *después* de que los agentes se hayan desplazado a un equilibrio del nuevo juego. El error casi universal que cometen los principales en la vida real consiste en que, en lugar de ello, lo que se preguntan es hasta qué punto les gusta lo que pasará *antes* de que los agentes aprendan los rudimentos básicos del nuevo juego.

En un ejemplo de la vida real, el nuevo director del organismo gestor de los planes de salud de la universidad se pronunció a favor de la abolición de

los mecanismos de cofinanciación. Éstos requieren que pagues cerca de las primeras 100 libras de cualquier prestación que solicites con el objetivo de desalentar el uso frívolo del servicio. Para compensar la pérdida de ingresos, propuso que se incrementaran las primas lo suficiente como para cubrir los ingresos del año anterior. Cuando el economista del comité objetó que las cuotas tendrían que incrementarse más que eso, se llevó a cabo una votación para ver si alguien más pensaba que «la gente iría al médico sin necesidad». Sólo el economista votó *sí* a esta tendenciosa pregunta, pero al año siguiente no había dinero suficiente para pagar las facturas.

El Congreso de los Estados Unidos cometió un error mayor en 1990 cuando aprobó una ley que pretendía asegurarse de que Medicare no pagara por las medicinas una cifra significativamente superior a la de la sanidad privada. Las disposiciones básicas de la ley establecían que las medicinas deberían venderse a Medicare a no más de un 88% del precio medio de venta. El problema lo produjo una disposición adicional que establecía que a Medicare debería ofrecérsele un precio al menos tan bueno como a cualquier minorista. Esta disposición sólo respondería a las intenciones de sus creadores si pudiera confiarse en que los fabricantes de medicamentos ignoraran los nuevos incentivos que la ley abría para ellos. Pero ¿por qué venderían los fabricantes farmacéuticos una medicina a un minorista a menos del 88% del precio medio si la consecuencia es que en-

tonces deben venderle la misma medicina al mismo precio a un cliente gigantesco como Medicare? No obstante, si no se venden medicinas a menos de un 88% de la media existente, el precio medio se verá forzado a subir.

En 2006, los demócratas liberales británicos propusieron la introducción de impuestos ecológicos que permitieran una reducción del impuesto sobre la renta por un total de 12.000 millones de dólares. La propuesta no sólo fue incapaz de percibir que la gente modifica su comportamiento como respuesta a los nuevos impuestos, sino que ¡el propio propósito de un impuesto ecológico consiste precisamente en modificar el comportamiento!

Nadie propondría nunca construir un avión o un puente sin dedicarle un análisis cuidadoso a cómo respondería el mecanismo a las tensiones y presiones que afrontará una vez construido, pero la idea de que se le preste la misma atención y cuidado al diseño de los mecanismos sociales suele acogerse con desdén. Una vez provoqué una carcajada descarada cuando sugerí que podría gastarse algo de dinero en poner a prueba una gran reforma de un laboratorio de psicología para ver si funcionaba antes de ponerla en práctica. Incluso el diseño de subastas de alto nivel se deja a menudo en manos de amateurs que no saben absolutamente nada de nada, ni siquiera de las ideas más sencillas que se exponen en este capítulo.

La decisión salomónica

Cuando tuvo que enfrentarse a dos mujeres que se peleaban alegando que eran madres del mismo bebé, el rey Salomón hizo su célebre propuesta de dividir al niño en dos, de modo que cada demandante pudiera quedarse una mitad. La madre falsa aceptó la decisión, pero a la madre verdadera se le conmovieron las entrañas por su hijo y suplicó que le dieran el niño a su rival antes de que lo partieran en dos. En ese momento, Salomón reconoció a la madre verdadera y le entregó el bebé.

En realidad, la historia bíblica no confirma demasiado la supuesta sabiduría proverbial de Salomón. Su plan habría fallado si la madre falsa hubiera gozado de una mente más estratégica. Así que, ¿qué plan funcionaría mejor?

Salomón es el principal. El demandante y el acusado son los agentes. Trudy es la madre verdadera, mientras que Fanny es la madre falsa. Para mantener la simplicidad, suponemos que todos saben que Trudy pagaría todo lo que tiene en el mundo por su bebé, pero Fanny pagaría sólo una cantidad menor.

El objetivo de Salomón consiste en entregar el bebé a la madre verdadera, pero no sabe de qué tipo es cada agente. Podría preguntárselo a ellas, pero Fanny no tiene ningún incentivo para decir la verdad. Así que Salomón sigue la metodología de Harsanyi e imagina un movimiento aleatorio que o bien le otorga a Trudy el papel de demandante y a Fanny

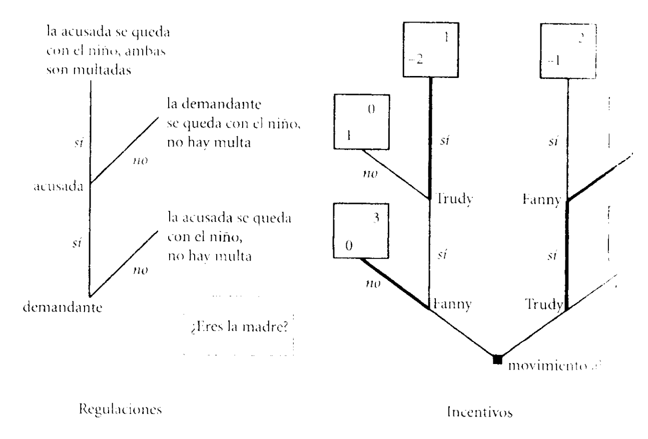


FIGURA 27. La decisión salomónica. El diagrama de la dere muestra el juego desde el punto de vista de Salomón cua Trudy valora al bebé en 3 siclos, Fanny valora el bebé en 1 s Salomón establece una multa de 2 siclos.

el de acusada o bien a Trudy el de acusada y a Fanny de demandante.

La Figura 27 muestra las reglas de un mecanism que consigue el mejor resultado, consistente en en tregar el bebé a la madre verdadera con certeza. I demandante juega primero y decide si declara que la madre o no. Si niega ser la madre, el niño se entre ga a la acusada. Si declara ser la madre, la acusad debe declarar si afirma o no ser la madre. Si niega se la madre, el bebé se entrega a la demandante.

Si ambas mujeres afirman que son la madre, el bebé se le entrega a la acusada y ambas mujeres so multadas.

Salomón debe emplear su famosa sabiduría para establecer los incentivos para Fanny y Trudy. La multa debe ser mayor que la valoración del bebé que hace Fanny, pero menor que la valoración de Trudy. Las líneas engrosadas de la Figura 27 muestran, por lo tanto, el resultado de aplicar la retroinducción. Cuando los actores usan este equilibrio de perfección en el subjuego, Trudy *siempre* se hace con el niño y no se paga multa alguna.

Aplicaciones económicas

Los grandes éxitos del diseño de mecanismos se encuentran en las subastas y en la economía regulatoria. Los miles de millones de dólares cosechados por las subastas de telecomunicaciones han atraído mucha atención, pero las aplicaciones regulatorias probablemente tienen más relevancia a largo plazo.

Los peces gordos que sufren la regulación vociferan mucho sobre las ventajas del libre mercado, pero saben que las buenas propiedades de los mercados perfectamente competitivos sólo se aplican cuando existe un número elevado de pequeños vendedores y compradores. Cuando únicamente hay un pequeño número de vendedores, siempre acaban aprovechando su poder en el mercado para fastidiar al consumidor, a menos que lo evite la regulación gubernamental.

Los partidarios del libre mercado tienen razón afirmar que la ausencia de regulaciones suele ser n jor que las malas regulaciones, como las que nos h endilgado mayoritariamente en el pasado, pero u regulación no tiene que ser necesariamente ma Regulaciones mejores, que emplean los princip del diseño de mecanismos, se están imponiendo an la oposición de varios gurús cuyos consejos han co vertido en innecesarios. Pero no tengo espacio pa tratar con seriedad la economía regulatoria aquí, a que el resto del capítulo tratará de las subastas.

William Vickrey

Las subastas confirman la rama de la teoría de ju gos en la que más se ha avanzado. También es el áre en la que la teoría de juegos ha sido empleada con u éxito más espectacular para resolver problemas apli cados. La cantidad de dinero conseguida en subasta de telecomunicaciones diseñadas por teóricos de lo juegos es astronómica.

Años ha, los gobiernos solían organizar lo que acabó conociéndose por «concursos de belleza» a la hora de asignar activos públicos valiosos a empresas privadas. Cada empresa presentaba un magnífico documento que explicaba por qué debería ser ésta la que recibiera el activo en lugar de una de sus rivales. Un comité de funcionarios del gobierno decidiría a continuación qué documento les gustaba más. Pero

normalmente los funcionarios no tenían ni idea del valor comercial de los activos que vendían. Los participantes en el concurso de belleza tampoco les decían la verdad. A menos que les beneficiara, ¿por qué iban a decirles la verdad los agentes a los principales? Necesitarían que les ofrecieran incentivos apropiados antes de desprenderse de la información que necesita el principal. Las subastas convencen a los agentes de decir la verdad porque les hacen respaldar sus palabras con dinero.

William Vickrey es el héroe de la teoría de las subastas. Defendía el uso de subastas específicamente diseñadas para la venta de activos públicos importantes treinta años antes de que la idea se generalizara. La Comisión Federal de Comunicaciones no hizo caso de estos argumentos hasta que el mensaje llegó finalmente al Congreso, que insistió en que el siguiente paquete de frecuencias de telecomunicaciones debía venderse por subasta. Un diseño realizado por un grupo de teóricos de los juegos liderados por Paul Milgrom recaudó a continuación un total de 20.000 millones de dólares de ingresos.

Un equipo que yo mismo lideré diseñó más subastas de telecomunicaciones en Gran Bretaña, Bélgica, Dinamarca, Grecia, Hong Kong e Israel. La subasta de Gran Bretaña recaudó por sí sola 35.000 millones de dólares. Tras la caída del índice NASDAQ en 2001 y el consiguiente pinchazo de la burbuja de las empresas tecnológicas, se oyeron muchos lamentos, ya que los ejecutivos de las empresas de telecomunica-

ciones intentaban culpar de su propia incapaci- para analizar correctamente el mercado a los teóri- de los juegos que supuestamente les hicieron pa- por las licencias más de lo que valían. Pero ¿qui- sino un idiota pujaría por una cosa más de lo q- cree que vale?

Creo que el alboroto solamente sirvió para subr- yar lo eficaces que pueden ser los teóricos de los ju- gos cuando se les permite aplicar la disciplina del di- seño de mecanismos a gran escala. Obviamente, el Comité del Nobel pensaba lo mismo y, aunque ta- díamente, le concedió el Premio Nobel a Vickrey pero éste murió tres días después de recibir la noti- ficación.

Tipos de subasta

Las subastas no son nada nuevo. Herodoto descri- la subasta de esposas no deseadas en la antigua Bab- lonia. Tampoco las subastas de alto nivel constituye- una novedad. En el año 193 d.C. la guardia pretori- na subastó el Imperio Romano, que pasó a manos d- un tal Didio Juliano. A continuación, se relaciona- algunos de los tipos de subastas de uso corriente.

Subasta inglesa

Sotheby's utiliza este tipo de subasta para vende- obras maestras. Un subastador invita a pujar en vo-



FIGURA 28. «¡A la una, a las dos, a las tres!»

alta. Las pujas se suceden hasta que nadie más quiere pujar. Tradicionalmente, el subastador grita: «¡A la una, a las dos, a las tres!».

Si nadie le interrumpe con una nueva puja, golpea la madera con la maza y se le vende el objeto al último en pujar.

Subasta holandesa

El subastador empieza anunciando un precio elevado, que gradualmente se va bajando hasta que un comprador pide parar. El primer comprador que lo haga adquiere el objeto al precio que le correspondía cuando intervino.

Las subastas holandesas pueden ser rápidas, por lo que se emplean para vender bienes perecederos,

como pescado o flores cortadas. En la subasta de flo-res de Amsterdam, un vendedor puede recibir flores desde Zambia por vía aérea y el comprador puede enviarlas a Chicago para su venta en un solo día. No obstante, en ocasiones se llevan a cabo este tipo de subastas a cámara lenta en tiendas de muebles usados que reducen el precio de los objetos no vendidos un 10% cada mes.

Subastas de primer precio y ofertas selladas

Es el formato estándar de las ofertas gubernamentales. Cada comprador potencial escribe su puja en secreto en un trozo de papel y la introduce en un sobre cerrado. El vendedor se compromete a vender el objeto a aquel que haga la oferta más alta y al precio que pujó.

Subastas Vickrey

En las subastas Vickrey, el objeto se vende al que más puja mediante un mecanismo de oferta sellada, pero al precio más alto de entre las pujas de *perdedores*. Ello corresponderá a la segunda oferta más alta, a menos que haya un empate en la primera plaza, en cuyo caso el ganador se elige aleatoriamente entre los mayores apostantes.

Milton Friedman lideró una campaña irrespon-sable pero exitosa para persuadir al gobierno esta

dounidense de que sustituyese el formato de las subatas de bonos del Tesoro, por lo que los gurús financieros lo llaman «subasta al segundo precio», pero se equivocaba al suponer que estaba defendiendo la generalización apropiada de la subasta de Vickrey a un caso en el que muchos objetos idénticos están a la venta.

Es sólo un ejemplo de fenómeno angustiante. Incluso en los pocos casos en los que los teóricos de los juegos conocen la respuesta a un problema, los funcionarios del gobierno prefieren el consejo de falsos profetas con mejores relaciones públicas.

Subastas óptimas

Alice quiere vender su casa, que para ella no vale nada si no encuentra comprador. Los únicos compradores potenciales son Bob y Carol. ¿Qué diseño de subasta debería usar Alice?

El problema de Alice es similar al del rey Salomón. No sabe en qué cantidad valoran Bob y Carol su casa. Si conociera sus valoraciones, simplemente les haría una oferta de «lo tomas o lo dejas» un céntimo por debajo de la mayor de las dos valoraciones. Entonces sería racional para el pujador con la mayor valoración aceptar la oferta, puesto que un beneficio de un céntimo es mejor que nada. Este análisis depende en gran medida del hecho de que Alice tenga la capacidad de adquirir un compromiso irrevoca-

ble con las reglas del Juego del Ultimátum. El diseño de mecanismos no funciona en absoluto si los agentes no creen que el principal cumplirá las reglas del juego que se inventa para que jueguen.

Dado que Alice no conoce las valoraciones de Bob y Carol, sigue la metodología de Harsanyi de modelizar la incertidumbre de sus valoraciones mediante un movimiento aleatorio. En el caso más simple, el movimiento aleatorio asigna a Bob y Carol las valoraciones de forma independiente, así que nada de lo que sepas sobre la valoración de un agente te aporta información nueva sobre la valoración del otro agente. Para ser concreto, estableceré el supuesto de que la valoración de la espléndida casa de Alice por parte de cada agente se halla entre 0 y 36 millones de dólares, con la misma probabilidad para cualquier valor del rango.

La mayoría de la gente se sorprende al descubrir que todos los diseños de subastas analizados en la sección anterior resultan óptimos para Alice si todo el mundo intenta maximizar su media de beneficios en dólares. Alice debería establecer un precio de reserva de 18 millones de dólares y a continuación cualquiera de los diseños, el que mejor le parezca, porque todos ellos le proporcionan los mismos beneficios de 15 millones de dólares.

Precios de reserva

Nótese que Bob se quedará sin pujar la mitad de las veces, al ser su valoración inferior al precio de reserva de Alice. Dado que lo mismo puede decirse de Carol, Alice no le venderá su casa a nadie una vez de cada cuatro. Si eso pasara, Alice no debería hacer trampas respecto a sus propias normas subastando la casa de nuevo con un precio de reserva más bajo, ¡a menos que no le importe que en el futuro los agentes no la crean cuando vuelva a ejercer de principal!

He aconsejado a muchos gobiernos sobre el diseño de subastas de alto nivel, pero nunca he tenido éxito a la hora de persuadir a los funcionarios responsables de establecer un precio de reserva tan alto como el que deseaba. Tampoco he tenido nunca confianza alguna en que los funcionarios entendieran que no debían devolver el objeto en venta inmediatamente al mercado si no se alcanzaba el precio de reserva. Pero mis esfuerzos en este frente no fueron del todo en vano, ya que proporcionan una excusa para, en lo que sigue, analizar solamente el caso de un precio de reserva cero. Todos los diseños de subasta analizados hasta ahora consiguen la misma media de ingresos, independientemente del precio de reserva, pero es más fácil de explicar el porqué en el caso en que se pueda contar con que pujarán todos los compradores potenciales.

Equivalencia de los beneficios

En un equilibrio de Nash simétrico, los agentes con valoraciones más altas harán pujas más altas en todas las subastas analizadas hasta ahora. Así que el agente con la valoración más elevada ganará. La probabilidad de que un agente con una valoración determinada gane la subasta es la misma para todos los diseños.

¿Qué espera pagar de media el agente? En cada una de nuestras subastas, la respuesta resulta ser *la mitad* de la valoración del agente. Se deduce que los ingresos medios de Alice deben ser los mismos con todos los diseños. Dichos ingresos medios resultan ser de solamente 12 millones de dólares, pero esto es lo máximo que puede esperar Alice si Bob y Carol pujan racionalmente y ella establece un precio de reserva de cero.

¿Por qué debería esperar el ganador un coste de sólo la mitad de su valoración? El caso de una subasta inglesa es el más sencillo. Es obvio que Bob y Carol deberían seguir pujando hasta que el precio alcanzara su valoración para, a partir de ese punto, callarse. Así que la puja terminará cuando los precios alcancen la más baja de las valoraciones de los jugadores. Dado que todos los valores inferiores a la valoración del ganador tienen la misma probabilidad de constituir la valoración del perdedor, su valor medio es de la mitad de la valoración del ganador.

Ahora es posible entender por qué la subasta de Vickrey es esencialmente lo mismo que una subasta inglesa. Si Bob y Carol le presentaran a Alice sus verdaderas valoraciones y ésta le vendiera la casa al mayor pujador al precio equivalente a la segunda mayor puja, los beneficios medios de Alice serán exactamente los mismos que los que comportaría una subasta inglesa. Pero ¿por qué tendría que esperar Alice a que Bob y Carol pujaran con sus verdaderas valoraciones?

La respuesta es que esta estrategia domina al resto de alternativas de los agentes. Si el otro agente ha pujado por debajo de tu valoración, te aseguras la victoria sin que ello afecte el precio que pagas por pujar la cifra de tu valoración. Si el otro agente ha pujado una cifra más alta que tu valoración, no quieres ganar y, por lo tanto, también podrías hacer una puja equivalente a tu valoración.

¿Qué hay de la subasta holandesa? Bob y Carol podrían escribir el precio llegados al cual planean poner fin a la subasta en un trozo de papel y dejar que Alice implementara la estrategia por ellos. Por consiguiente, una subasta holandesa es esencialmente lo mismo que una subasta a primer precio con ofertas selladas. Así que si podemos calcular lo que Bob y Carol meterían en sus sobres en este último tipo de subasta, también sabremos cuándo tendrían pensado parar la subasta holandesa.

Rebajar tu puja

¿Qué puja deberías introducir en el sobre en una subasta a primer precio con ofertas selladas? Ciertamente, no pujarás de acuerdo con tu valoración auténtica, porque tu beneficio sería de cero si ganaras. Tienes que rebajarla. Pero ¿cuánto? Ya desvelé el secreto cuando explicaba por qué todos nuestros diseños de subasta consiguen los mismos ingresos. Tanto Bob como Carol deberían pujar sólo la mitad de sus respectivas valoraciones.

Este hecho suele probarse mediante cálculo, pero pienso explicarlo utilizando la jardinería paisajística. ¿Qué forma debería tener un jardín si quieres cerrar el máximo espacio con una longitud fija de valla? La respuesta es, obviamente, un círculo. Si el jardín tiene que ser rectangular, la respuesta es un cuadrado.

Volviendo al problema de encontrar un equilibrio de Nash simétrico para una subasta a primer precio con ofertas selladas, imaginémonos que es de todos sabido que Carol hará una puja proporcional a su valoración. La probabilidad de ganar de Bob será por tanto proporcional a la puja que haga, sea cual sea. Bob quiere maximizar sus beneficios medios, que son el producto del beneficio que obtiene si gana y su probabilidad de ganar. Este producto es proporcional al área de un jardín rectangular cuya longitud es la ganancia si gana, y cuya anchura es su puja.

Dado que si gana los beneficios equivaldrán a la diferencia entre su valoración y su puja, la longitud de la valla del jardín es proporcional a su valoración. Por consiguiente, la valla tiene la misma longitud independientemente de la puja que haga. Así que decidir la mejor respuesta de Bob se reduce a calcular qué jardín rectangular tiene la mayor área cuando se cierra con una valla de longitud fija. Dado que la respuesta es un cuadrado, la mejor respuesta de Bob consiste en hacer una puja igual a la diferencia entre su valoración y su puja, de lo que se deduce que su puja óptima equivale a la mitad de su valoración. Por lo tanto, su puja será proporcional a su valoración, y la puja óptima de Carol también será de la mitad de su valoración.

Subastas en las que todos pagan

Los profesores de cursos de teoría de juegos son muy aficionados a subastar un dólar de acuerdo con las normas siguientes. Se puja como en una subasta inglesa y el jugador con la puja más alta gana el dólar, pero *todos* pagan la puja más alta, *incluidos* los que no ganan el dólar. Ver la expresión de las caras de los alumnos cuando la apuesta se acerca a un dólar y los perdedores se dan cuenta de que ahora vale la pena apostar *más* de un dólar puede resultar muy entretenido.

Sobornar a políticos o jueces corruptos es en gran medida como una subasta en la que todos pagan con

ofertas cerradas. Todo el mundo paga, pero sólo el que soborna puede tener éxito. Si entre los ladrones cabe el honor, será el soborno más alto el que se lleve el gato al agua.

Las subastas en las que todos pagan se mencionan en esta sección solamente para argumentar que el resultado de la equivalencia de beneficios se aplica de una manera muy generalizada. Obviamente, los agentes rebajarán mucho más sus apuestas en una subasta con ofertas selladas en la que todos pagan que en una a primer precio con ofertas selladas, pero los beneficios medios de Alice seguirán siendo de 12 millones de dólares.

Subastas a medida

Los que escriben de economía en los periódicos a veces citan los resultados de equivalencia de los beneficios cuando argumentan erróneamente que *nunca* importa qué tipo de subasta emplea el vendedor. Pero dicho resultado desaparece si Bob y Carol tienen presupuestos limitados o son aversos al riesgo. En ese caso, Alice consigue más en una subasta holandesa que en una subasta inglesa. Tampoco se sostiene si las valoraciones de Bob y Carol dejan de ser independientes la una de la otra. En ese caso Alice esperará más de una subasta inglesa que de una holandesa.

Cuando una subasta de alto nivel va a llevarse a cabo, es de suma importancia que sus reglas se ajus-

ten a las circunstancias. Por ejemplo, si de algún modo Alice supiera que las cantidades en las que es posible que Bob y Carol valoren su casa son de 27 y 36 millones de dólares, no debería llevar a cabo ninguna de las subastas analizadas hasta ahora. Si las dos posibilidades son igual de probables, ¡debería realizar una subasta a oferta sellada en la cual el ganador pague la media de las dos pujas!

La maldición del ganador

Los agentes con valores privados conocen sus valoraciones antes del inicio de la subasta, y nada de lo que pudieran aprender durante el evento les llevaría a cambiarlas. Todas las subastas que hemos analizado hasta ahora se han tratado como subastas de valor privado, en las cuales todos saben que el valor del objeto a la venta es el *mismo* para todos los compradores potenciales.

Por ejemplo, cuando se subastan licencias para perforar pozos de petróleo en el fondo marino, la cantidad de petróleo en un terreno es la misma para todo el mundo, pero las estimaciones de los compradores sobre cuánto petróleo es probable que haya en un terreno dependerán de informes geológicos diferentes. Dichos informes no sólo son caros, sino también notoriamente carentes de fiabilidad. Algunos compradores potenciales recibirán por lo tanto informes optimistas y otros recibi-

rán informes pesimistas. Así que, ¿quién ganará la subasta?

Si Bob trata la estimación que hace su informe sobre el valor del terreno como un valor privado, ganará siempre que su informe sea el más optimista. Pero cuando Bob se dé cuenta de que su victoria en la subasta implica que todos los demás informes son más pesimistas que el suyo, ¡maldecirá la mala suerte que ha tenido al ganar! Si desde el principio hubiera sabido que todos los demás informes eran más pesimistas que el suyo, no habría pujado tan alto.

Como en la subasta en la que todos pagan, a los profesores de teoría de juegos les gusta pillar desprevenidos a sus alumnos atrapándolos en una subasta de valor común. Un vaso lleno de monedas y billetes arrugados de valores diversos se subasta a la puja máxima, que suele desembocar en la maldición del ganador y, por consiguiente, resulta en unas pérdidas sustanciales.

El Juego de la Billetera

Para evitar la maldición del ganador, los jugadores deben tener en cuenta la información que aportan las pujas de sus rivales respecto a cuánto piensan que vale el objeto a la venta. El Juego de la Billetera es un ejemplo básico.

Alice confisca las billeteras de Bob y de Carol y a continuación recurre a una subasta inglesa para venderles la suma de sus contenidos.

Un equilibrio de Nash tiene lugar si ambos jugadores planean seguir pujando hasta que el precio alcance el doble del dinero que tenían en su propia billetera. Si Carol apuesta así, Bob sufrirá la maldición si gana por apostar más del doble de lo que hay en su propia cartera. Por lo tanto, él sabe que la cantidad de dinero de su propia cartera es inferior que la mitad del precio final. También sabe que la cantidad de dinero en la billetera de Carol es de menos de la mitad del precio final, porque ha parado de pujar. Por lo tanto, la cantidad total de dinero que ha ganado Bob debe ser menor que la mitad de lo que pagó por él.

8. Biología evolutiva

Los biólogos gozan de una enorme ventaja respecto a los científicos sociales a la hora de aplicar la teoría de juegos porque tienen muchos más datos. La selección natural ha generado una gran variedad de especies distintas, algunas de las cuales son tan raras y maravillosas que parecen desafiar a las explicaciones racionales. Pero ¿qué podría ser más satisfactorio que aprender finalmente por qué la genética inusual de los *Hymenoptera* explica la desigual ratio por géneros de determinadas especies de abejas? ¿O por qué dos variantes muy distintas de la perca de agallas azules son capaces de coexistir juntas en un mismo lago? Negar la evolución ante la visión de estos ejemplos me parece como imitar a los teólogos que se negaban a mirar a través del telescopio de Galileo.

Resulta todavía más notable el hecho de que incluso los juegos más básicos a veces serán suficientes

para condensar con éxito en un modelo algún tipo de comportamiento animal. Realmente nadie cree, por ejemplo, que la reproducción entre pájaros tenga lugar sin sexo o que el proceso evolutivo sea determinista. Pero, como en la física, los modelos resultantes de hacer estas simplificaciones heroicas a veces se ajustan increíblemente bien a los datos.

La teoría de juegos evolutiva

Herbert Spencer resumió la teoría de la evolución como *la supervivencia del más apto*. Cuando preguntamos por qué los animales de algunas especies se comportan como lo hacen, estamos buscando una respuesta que explique por qué los rasgos de comportamiento alternativos eran menos aptos. Sin embargo, ¿cómo debe definirse la aptitud?

La definición de Bill Hamilton hace inevitable que modelizar el comportamiento animal se reduzca a veces a encontrar el equilibrio de Nash de los juegos. Consideraba que la aptitud de un rasgo de comportamiento consistía en el número medio de hijos extra que dicho rasgo conllevaba para la siguiente generación como resultado de que el rasgo estuviera presente en la generación actual. Con esta definición, los rasgos de comportamiento pueden identificarse con estrategias, y la aptitud, con la utilidad.

Cuando los animales compiten, podemos imaginarnos que la suerte ocasionalmente selecciona dos

o más individuos de las poblaciones relevantes para jugar a un juego. Un famoso juego en ecología es el del depredador y la presa, que resulta en que los números de linces y liebres canadienses oscilen en ciclos indefinidamente. No obstante, este capítulo se centrará en juegos desarrollados por una sola especie y con resultados estables. Por ejemplo, ¿qué determina el tiempo que esperará una mosca del estiércol macho en una boñiga de vaca a una hembra para reproducirse? Dado que el problema estratégico es el mismo para todas las moscas del estiércol, podemos centrar nuestra atención en los equilibrios de Nash simétricos de juegos simétricos.

Un juego simétrico tiene el mismo aspecto para todos sus jugadores. En un equilibrio simétrico, todos los jugadores emplean la misma estrategia. Una variante del teorema de Nash demuestra que todos los juegos simétricos finitos tienen, por lo menos, un equilibrio de Nash simétrico.

Replicadores

Desgraciadamente, las aguas filosóficas se han enturbiado por la controversia sobre quién o qué debe considerarse jugador en un juego evolutivo. ¿Las especies en pleno?, ¿un animal individual?, ¿un paquete de material genético?, ¿o un gen individual? El título del libro de Richard Dawkins *El gen egoísta* parece explicarnos dónde se sitúa en este asunto,

pero en realidad adopta la visión más sofisticada de que todo lo que se reproduce a sí mismo puede considerarse como la unidad fundamental en un juego evolutivo.

Al igual que la anciana señora que una vez oí que le hizo pasar un mal rato a Dawkins por señalarle que los genes son sólo moléculas y, por lo tanto, no pueden gozar de libre albedrío, la gente a menudo considera paradójico que la teoría de juegos pueda aplicarse con éxito a la biología evolutiva. ¿Cómo puede un insecto participar en un juego? Los insectos carecen de razón. Su comportamiento es en gran medida instintivo. Sólo hacen lo que están programados para hacer.

La solución de la paradoja es que no se debe formar necesariamente a los animales objeto de estudio como jugadores del juego. Si el comportamiento que se investiga es en gran medida instintivo, se encuentra codificado en los genes del animal. Podría pensarse en los genes como parte del hardware de un ordenador natural: la parte en la que se almacenan los programas del ordenador; algunos de estos programas controlan el comportamiento del animal.

Una propiedad importante de los programas de ordenador es que pueden copiarse de un ordenador a otro. Los virus de ordenador *se copian a sí mismos* de un ordenador a otro, se *autorreplican*. Los programas grabados en los genes de los animales también se *autorreplican*. Pero su replicación es inmensamente complicada en comparación con la replicación de

los virus informáticos. La naturaleza no solamente debe copiar programas de un ordenador natural a otro, sino que tiene que crear un nuevo ordenador natural al que sea posible copiar los programas. El descubrimiento de Crick y Watson sobre cómo resuelve la naturaleza esta cuestión mediante el dispositivo de la doble hélice constituye una de las grandes historias de la aventura científica. Pero de esta emoción habrá que disfrutar en otro momento. Lo importante aquí es que entendamos que existe *algo* que hace dos cosas:

- Se replica a sí mismo.
- Determina el comportamiento estratégico en un juego.

Cuando encontremos en un modelo un ente al que le podamos atribuir estas dos propiedades, lo llamaremos *replicador.*

Ciertamente, los genes pueden ser replicadores. A veces los detractores se quejan de que no es probable que una mutación en un solo gen tenga muchos efectos, pero incluso la mínima modificación de un rasgo de comportamiento puede ser significativa cuando se calcula la media de aptitud en un periodo lo suficientemente largo. Los paquetes de material genético que tienden a replicarse juntos también cuentan como replicadores. En las especies partenogenéticas, como el gorgojo de la harina, una madre transmite toda su información genética a sus crías,

en cuyo caso también podría decirse que cada tipo individual de animal es un replicador.

Para sobrevivir, los replicadores necesitan huéspedes en cuyos genes imprimirse. Hemos definido la aptitud de un huésped como una medida de la frecuencia con que replica sus genes. Así que casi se convierte en una tautología la afirmación de que los replicadores que confieren una elevada aptitud a sus huéspedes llegarán a controlar a un mayor número de huéspedes que aquellos que les confieren una aptitud baja. Si el entorno sólo mantiene un pequeño número de huéspedes, el replicador que confiera una baja aptitud a sus huéspedes acabará por desaparecer por completo. En ese caso, habrá sobrevivido el replicador más apto.

Si Alice está observando cómo evoluciona la situación, podría intentar darle sentido a lo que ve atribuyendo un objetivo o propósito a todo mecanismo que genere replicadores: el de maximizar la aptitud de sus huéspedes. Si la selección natural opera durante el tiempo suficiente en un entorno estable, sólo los replicadores que sean eficientes en la maximización de la aptitud de sus huéspedes sobrevivirán. Así pues, para Alice *será como si* algo estuviera eligiendo conscientemente replicadores para maximizar la aptitud. A ese *algo* imaginario le llamaremos «jugador».

Por ejemplo, cuando los replicadores son considerados variantes de un solo gen, podemos imaginar al jugador sentado en el locus del cromosoma donde se

sitúa ese gen en concreto. Los biólogos cuidadosos a los que les gusta pensar en los propios genes como jugadores emplean el término *alelo* para las formas posibles que un gen puede adoptar. No obstante, es común difuminar la distinción entre un jugador y un replicador de un modo muy similar a la forma en que a menudo se difumina la distinción entre un jugador y un tipo en la teoría de la información incompleta (véase «Información incompleta», Capítulo 6).

Estabilidad evolutiva

Para que la evolución funcione, debe haber cierta variación en la población. La mezcla de genes que tiene lugar durante la reproducción sexual es una fuente de variación. Las migraciones geográficas y las mutaciones son otro. ¿Podemos esperar que una población se estabilice frente a una variación aleatoria como ésta? Un enfoque consiste en buscar un atractor asintótico, una población de replicadores que se muestre estable ante cualquier perturbación de poca entidad.

El modelo más simple posible sobre un proceso evolutivo biológico se llama «dinámica del replicador». La Figura 14 muestra su funcionamiento en un juego concreto, cuando se toman jugadores de dos poblaciones diferentes que evolucionan por separado. En este capítulo, los diagramas correspondientes son mucho más simples, porque la atención

se centra en juegos simétricos en los cuales los jugadores se toman de una sola población.

La dinámica del replicador supone que la proporción de una población que alberga un determinado replicador crece a un ritmo proporcional a dos factores:

- La fracción de la población que en la actualidad alberga el replicador.
- La diferencia entre la aptitud actual de los huéspedes del replicador y la aptitud media de todos los huéspedes de la población.

El primer requisito se limita a reconocer que la tasa de crecimiento de un replicador se encuentra limitada por el número de padres que pueden transmitir el replicador a la siguiente generación. El segundo requisito reconoce que la evolución sólo puede tener en cuenta la aptitud de un replicador *respecto a* la aptitud del conjunto de la población.

Si todos los replicadores a considerar están presentes cuando la dinámica del replicador se inicia, el sistema sólo puede converger en un equilibrio de Nash simétrico, si es que converge en algo.

Estrategias evolutivas estables

La idea de una estrategia evolutiva estable o EEE se inicia con George Price, que presentó un ensayo de 60 páginas sobre matemática evolutiva en la revista

Nature, que, como cualquier autor más mundano habría sabido, sólo publica artículos cortos. Afortunadamente, su revisor era John Maynard Smith. Juntos escribieron un artículo que destilaba la esencia de la sabiduría de Price de una forma legible. Maynard Smith se puso a escribir *Evolution and the Theory of Games*, que hizo aparecer en el mapa la teoría de juegos evolutiva. George Price acabó por suicidarse, según se dijo, porque encontraba cada vez más difícil conciliar sus contribuciones fundamentales a la biología evolutiva con sus convicciones religiosas.

Cuando se toman jugadores de poblaciones diferentes, las consideraciones a las que vamos a apelar no llevan a nada más exótico que un equilibrio de Nash estricto (en el cual no existen mejores respuestas alternativas a las estrategias de equilibrio). Pero las estrategias evolutivas estables se aplican cuando los jugadores proceden de *la misma* población, y así se puede desarrollar un juego simétrico. Las propiedades definitorias son:

- Una estrategia evolutiva estable (EEE) debe ser la mejor respuesta a sí misma.
- Si la EEE no es la única respuesta óptima ante sí misma, debe ser una respuesta mejor respecto a cualquier alternativa de lo que la alternativa es para sí misma.

El primer requisito establece que un par de estrategias evolutivas estables debe constituir un refina

miento del concepto de equilibrio de Nash simétrico. Pero si éste fuera el único requisito, ¿qué evitaría una invasión desestabilizante de la población por parte de una respuesta óptima alternativa? El segundo requisito proporciona la necesaria presión evolutiva contra una invasión como ésta, al exigir que una EEE sea más apta que un invasor inmediatamente después de la invasión.

En un juego simétrico, cualquier EEE es necesariamente un atractor asintótico de la dinámica del replicador. A su vez, un atractor asintótico constituye necesariamente un equilibrio de Nash simétrico. Por consiguiente, tenemos una condición necesaria y una condición suficiente para la estabilidad evolutiva. Ambas condiciones se aplican a una clase más amplia de procesos evolutivos que van más allá de las dinámicas de los replicadores, pero hay que ser un poco cuidadoso al aplicar el concepto de las EEE aun cuando se trate de dinámicas de este tipo. Por ejemplo, las trayectorias de la dinámica del replicador en Piedra-papel-tijera tienen una estructura cíclica y el juego carece de EEE (véase «Descubrir estrategias maximin», Capítulo 2). Peor todavía, existen otros juegos simétricos 3 × 3 que tienen atractores asintóticos aislados que no son EEE. El concepto únicamente es cien por cien seguro en juegos simétricos con sólo dos estrategias puras.

Sin embargo, criticar los defectos de los conceptos de modelización evolutiva a nivel abstracto no resulta demasiado productivo. La verdadera cuestión

es: ¿cuán útiles resultan para entender ejemplos biológicos reales?

El Juego del Halcón y la Paloma

A veces dos pájaros procedentes de la misma especie compiten por un recurso valioso determinado. Los dos replicadores de la población hacen que sus huéspedes, ante esa situación, sean o pasivos o agresivos. Un pájaro pasivo le cede todo el recurso a un pájaro agresivo. Dos pájaros pasivos comparten el recurso equitativamente. Dos pájaros agresivos luchan.

Maynard Smith se refería a los pájaros pasivos como *palomas*, y a los agresivos, como *halcones;* de ahí que se le llame «Juego del Halcón y la Paloma». Pero no hay que pensar erróneamente que los pájaros se consideran representantes de poblaciones distintas que evolucionan por separado. Se entiende que el entorno es completamente simétrico.

El Dilema del Prisionero

Si la posesión de un recurso incrementa la aptitud de un pájaro en cuatro útiles y emprender una pelea en solamente uno, el Juego del Halcón y la Paloma se reduce al Dilema del Prisionero que muestra la Figura 29. Cabe recordar que el único equilibrio de Nash es que ambos jugadores jueguen *halcón* (véase

Capítulo 1). Dado que se trata de una estrategia dominante estricta, también constituye una estrategia evolutiva estable.

Los pájaros que juegan al Juego del Halcón y la Paloma proceden de una misma población, y por lo tanto, la dinámica del replicador del Dilema del Prisionero de la Figura 29 es unidimensional (y no bidimensional como en ejemplos previos). Las flechas muestran que existe un único atractor asintótico en el cual la población está enteramente compuesta de halcones. Si fuéramos a perturbar a esta población al introducir en ella una fracción significativa de mutantes de tipo paloma, a la larga todos ellos serían eliminados. De hecho, la cuenca de atracción consiste en todos los estados de la población excepto aquel en el cual toda la población está compuesta de palomas. Por lo tanto, la aparición de una fracción de mutantes de tipo halcón, por pequeña que sea, condena a las palomas a una extinción final.

La falacia de la selección de grupo

El ardor con el que los teóricos de los juegos niegan las diversas falacias que afirman que la cooperación es racional en el Dilema del Prisionero palidece hasta lo insignificante cuando se compara con la ferocidad casi diabólica con la que los biólogos evolutivos denuncian la falacia de la selección de grupo.

De acuerdo con la falacia de la selección de grupo, la evolución favorece las mutaciones que refuerzan la aptitud de las especies en lugar de la aptitud del propio gen mutado. Una población que juegue *paloma* en el Dilema del Prisionero sería por lo tanto invulnerable a una invasión por parte de un mutante *halcón* porque cualquier fracción de halcones en la población reduciría la aptitud total de ésta. La falacia reside en situar erróneamente el replicador relevante al nivel de las especies. Al fin y al cabo, es a nivel molecular donde físicamente tiene lugar la replicación cuando se divide la doble hélice. Por consiguiente, es correcto centrar la atención en la única EEE, que es *halcón*.

Charles Darwin no sabía nada de la genética moderna y, por lo tanto, a veces incurría en errores, entre los que se encontraba la falacia de la selección de grupo. No obstante, el desafortunado objetivo de las críticas contemporáneas es el biólogo Vero Wynne-Edwards, quien sugirió, por ejemplo, que cuando los estorninos se reúnen en grandes bandadas al anochecer lo hacen para estimar su número con la intención de controlar el tamaño de la población. La crítica de los argumentos de la selección de grupo por parte de George Williams tuvo mucha influencia y provocó una explosión de títulos, de los que *El gen egoísta*, de Dawkins, no es más que un ejemplo.

El problema de la ratio entre sexos constituye un bonito ejemplo del fracaso de la falacia de la sele

ción de grupo. ¿Qué ratio entre sexos favorecería a una especie nueva? La respuesta es que pocos machos y muchas hembras. Entonces, ¿por qué tenemos un número aproximadamente igual de chicos y chicas? Porque un chico que nazca en una población formada mayoritariamente por chicas será más fuerte que una chica; asimismo, una chica nacida en el seno de una población formada mayoritariamente por chicos será más fuerte que un chico. ¿Cómo se llega a un equilibrio en una situación como ésa? Éste es nuestro nuevo tema.

Gallina

Los valores de los pagos que identifican el Juego del Halcón y la Paloma con el Dilema del Prisionero no son realistas, porque es probable que el menor de los daños se convierta en un grave hándicap. Si asignamos una utilidad negativa a un pájaro que se pelea, sustrayéndole así dos útiles más de sus pagos, pasamos a la versión del Gallina de la Figura 29.

El Juego del Gallina tiene tres equilibrios de Nash: dos puros y uno mixto. El equilibrio mixto requiere que cada jugador juegue *paloma* una tercera parte de las veces y *halcón* dos terceras partes del tiempo. Al contrario que en el apartado de «Alcanzar un equilibrio», en el Capítulo 2, rechazamos los equilibrios puros porque son asimétricos, ahora solamente nos resulta relevante el equilibrio mixto.

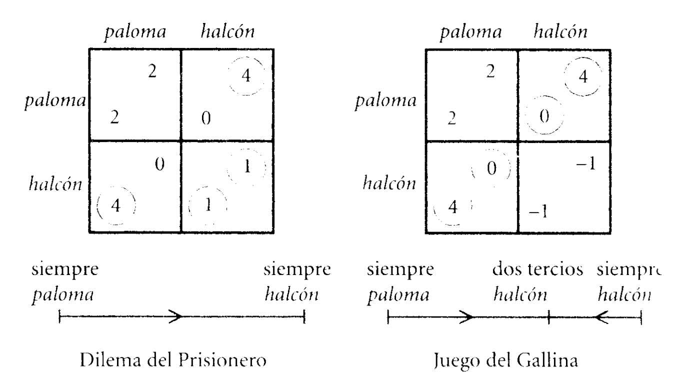


FIGURA 29. Dinámica del replicador en el Juego del Halcón y la Paloma. Para una sola población, pueden mostrarse las trayectorias empleando diagramas unidimensionales. Un diagrama similar para el Juego de la Caza del Ciervo mostraría las flechas señalando en dirección contraria a este equilibrio mixto.

¿Debemos entonces considerar a los pájaros como si tirásemos un dado? No en el Juego del Halcón y la Paloma. Para entender por qué, hay que imaginarse que un tercio de la población consiste en palomas y dos tercios en halcones. Cuando la naturaleza selecciona dos pájaros al azar entre esta polimorfa población para jugar al Gallina, a ambos jugadores les parecerá que su oponente juega la estrategia del equilibrio mixto. Dado que los jugadores son indiferentes ante las estrategias puras que emplean en un equilibrio mixto (véase Capítulo 2), tanto halcones como palomas serán igual de aptos. Así que ningún pájaro necesita hacer nada aleatorio para que el equilibrio se sostenga.

Maynard Smith observó que el estado de población mixta no sólo se corresponde con un equilibrio de Nash simétrico, sino también con una estrategia evolutiva estable. La dinámica del replicador que muestra la Figura 29 confirma que una población con el doble de halcones que de palomas constituye un atractor asintótico. Es bueno ser halcón cuando hay muchas palomas, como es bueno ser paloma cuando hay muchos halcones. Los dos efectos se compensan entre sí en el equilibrio de Nash mixto, en el cual es indiferente que un jugador elija entre *paloma* o *halcón*.

Hubo un tiempo en el que la supervivencia de dos variantes del mismo animal en un mismo entorno se consideraba un misterio. Seguramente un tipo debe de ser un poco menos apto que el otro, y por lo tanto, ¿será llevado a la extinción a largo plazo? Pero en estas situaciones la aptitud de una variante varía de acuerdo con su frecuencia.

La perca de agallas azules

La perca de agallas azules *(Leoponis macrochirus)* es un objetivo popular entre los pescadores de los lagos norteamericanos. El pez disfruta de una temporada reproductiva sincronizada en la cual los machos señalan nidos en el fondo de las orillas. Las hembras ponen sus huevos en el nido que les gusta más. Los huevos son rápidamente fertilizados por el macho

residente, que a partir de entonces protege con tenacidad la descendencia resultante.

Los machos guardianes comparten los lagos con otro tipo de macho, comúnmente llamado *sneaker* («furtivo»). Los furtivos alcanzan la fase adulta en dos años, mientras que los guardianes necesitan siete. Los furtivos son incapaces de establecer y guardar un nido, ya que son poco más que órganos sexuales autopropulsados. Cuando una hembra pone sus huevos en un nido, corren desde sus escondrijos para intentar fertilizar sus huevos antes que el guardián.

En una generosa muestra de exuberancia, la naturaleza nos ha obsequiado con un furtivo alternativo que se disfraza de hembra, así como con un guardián alternativo que sitúa su nido a cierta distancia de los nidos establecidos por los guardianes corrientes, muy cercanos entre sí.

La teoría indica que el número de cada tipo de macho se ajustará para igualar su aptitud, una conclusión que concuerda tranquilizadoramente con los datos.

Jugar sobre el terreno

Los animales no necesitan aleatoriedad cuando compiten por parejas, pero en ocasiones se comportan como si así lo hicieran cuando «juegan sobre el terreno».

Las moscas macho del estiércol (*Scatophaga stercoraria*) se congregan en boñigas de vaca con la esperanza de aparearse con hembras atraídas por el olor. ¿Cuánto debería esperar un macho antes de buscar una boñiga fresca (lo que le lleva una media de cuatro minutos)? La teoría de juegos nos dice que busquemos los equilibrios de Nash simétricos. En el modelo más simple, cada macho empleará una estrategia mixta en la cual se distribuye el tiempo de espera exponencialmente. Es decir, su probabilidad de abandonar una boñiga en este momento siempre es del doble de lo que esperaría si estuviera durante un periodo de tiempo fijo. Pero ¿cuánto dura este periodo?

Si la teoría tiene razón, el periodo debería ajustarse hasta que el éxito del apareamiento de una mosca del estiércol fuera el mismo, independientemente de su periodo de espera. Como en el caso de las percas, los datos respaldan esta hipótesis en gran medida, aunque me atrevo a decir que una mosca del estiércol no sería más receptiva que un ejecutivo de una empresa ante la idea de que estaba introduciendo activamente elementos aleatorios (véase «¿Tiene sentido hacer aleatorias las decisiones?», Capítulo 2).

Selección por parentesco

El reino animal está preñado de ejemplos de cooperación intrafamiliar. Los perros cazadores africanos regurgitan la comida para ayudar a hermanos de

manada hambrientos. Los titís y los monos tamarinos ayudan en el cuidado de sus sobrinos de familias extensas. Los machos de algunas especies de pájaros hacen lo mismo cuando sus posibilidades de reproducción en el año en curso son bajas. Los áfidos renuncian a su vida para defender a sus descendientes de un ataque. Los bueyes almizcleros forman un anillo defensivo alrededor de los miembros más débiles de la familia cuando les atacan los lobos. ¿Por qué es tan importante el parentesco en el reino animal?

La regla de Hamilton

El libro de Bill Hamilton *Narrow Roads of Geneland* versa sobre la vida y obra de otro genio estrambótico, que ha fallecido recientemente de una típica muerte aventurera en un viaje de investigación de campo a Brasil. Hamilton se merece la mayor parte del mérito de haber introducido la teoría de juegos en la biología, aunque dudo que oyera hablar siquiera de John Nash durante los largos años en los que luchó, solo y sin reconocimiento, para crear un campo completamente nuevo de investigación. Uno de sus muchos logros consistió en formular la explicación evolutiva de la cooperación dentro de la familia, conocida en la actualidad como «selección por parentesco».

Su argumento fue anticipado célebremente en una broma medio seria de J. B. S. Haldane: cuando se le

preguntaba si daría su vida por otro, contestaba que el sacrificio sólo valdría la pena si salvaba ¡a dos hermanos o a ocho primos! La broma de Haldane sólo es divertida si sabes que tu grado de relación con un hermano de padre y madre es de una mitad y tu grado de relación con un primo carnal es de un octavo.

A veces se dice que el grado de relación familiar no es importante en realidad porque, en todo caso, los seres humanos comparten casi todos sus genes. Pero eso sería pasar por alto que nunca nos importan los genes que *siempre* están presentes en el cuerpo humano, sino sólo una parte concreta del comportamiento que será modificada o abandonada en función de si un gen recientemente mutado está presente o ausente.

Tu grado de relación con un familiar es la probabilidad de que un gen recientemente mutado de tu cuerpo también se encuentre en el cuerpo de tu familiar. Para ver qué grado de relación con un primo es un octavo, imagínate que tu prima es la hija de la hermana de tu madre. La probabilidad de que un gen mutante de tu cuerpo provenga de tu madre en lugar de provenir de tu padre es de una mitad. Si procedía de tu madre, la probabilidad de que también esté presente en el cuerpo de tu tía es de una mitad. Si está en el cuerpo de tu tía, la probabilidad de que se lo pasara a tu prima es de una mitad. Si multiplicamos estas tres mitades entre sí, el resultado es un octavo.

Lo que cuenta al calcular la aptitud de un gen es la media del número de veces que es replicado en la ge-

neración siguiente. Pero no importa cuál de las dos o más versiones idénticas del gen se copie. Una copia del gen en el cuerpo de mi hermana es tan buena como una copia de un gen idéntico que esté dentro de mi propio cuerpo. Por lo tanto, cuando calculamos la aptitud de un gen de mi cuerpo, debemos tener en cuenta no solamente el efecto de mi comportamiento en mi propio éxito reproductivo, sino su efecto en el éxito reproductivo de mis familiares. Hamilton llamaba al resultado de dichos cálculos aptitud *inclusiva.*

Si mi hermana es mi único familiar, un gen mutante de mi cuerpo no debería limitarse a contar el número extra de hijos que tendré de media a consecuencia de la modificación de mi comportamiento que ello comporta. Debería emplear la regla de Hamilton, que exige sumar el número de hijos adicionales que tendría mi hermana, ponderado por la mitad, porque ésta es la probabilidad de que el gen también se encuentre en su cuerpo. Por ejemplo, si espero tener un hijo menos a consecuencia de un cambio en mi comportamiento y mi hermana espera tener cuatro hijos más, la regla de Hamilton dicta que la aptitud inclusiva de mi nueva estrategia es −1 + ½ × 4 = 1. Por consiguiente, mis pérdidas personales son superiores al beneficio de mi hermana.

Las consecuencias de sustituir en un juego la aptitud individual por la aptitud inclusiva pueden ser dramáticas, como en el Dilema del Prisionero

hermanos y hermanas — comportamiento aprendido

	paloma	*halcón*
paloma	3 / 3	(4) / (2)
halcón	(2) / (4)	1½ / 1½

	paloma	*halcón*
paloma	(4) / (4)	(4) / (4)
halcón	(4) / (4)	2 / 2

gemelos — comportamiento instintivo

	paloma	*halcón*
paloma	4	
halcón		2

FIGURA 30. Parientes juegan al Dilema del Prisionero. La regla de Hamilton se ha empleado para convertir las aptitudes individuales del Dilema del Prisionero de la Figura 29 en aptitudes inclusivas. Los gemelos idénticos ahora cooperarán, pero de sus hermanos debemos esperar comportamientos mixtos.

Figura 30. Cuando los pajaritos compiten con sus hermanos por la comida, su comportamiento está genéticamente programado en gran medida. Si los pajaritos fueran gemelos idénticos, ambos jugadores podrían contar con que su oponente elige exactamente la misma estrategia que ellos. La situación se reduce entonces a un juego de un solo jugador.

Los juegos de dos participantes de la Figura 30 son más adecuados para modelizar el comportamiento humano en aquellos casos en los que el comportamiento de los jugadores es aprendido más que genéticamente programado. Cuando Alice y Bob son gemelos idénticos, se inicia un juego al que llamo «la Delicia del Prisionero» porque en este caso *paloma* es la estrategia dominante. Cuando son hermano y hermana, nos llevan a una forma de Juego del Gallina en

la cual deberíamos esperar que sobrevivan juntas tanto actitudes de halcón como de paloma. Examinar el caso de hermanos cuyo comportamiento está determinado genéticamente –que resulta más interesante– nos apartaría demasiado del tema.

El parentesco es especialmente importante en sociedades humanas primitivas. En las sociedades que permiten la promiscuidad, por ejemplo, algunas de las funciones que en nuestra sociedad lleva a cabo un padre las adopta el tío materno de un niño; la razón subyacente es que todo el mundo sabe que su grado de relación con el niño es de un cuarto, mientras que nadie puede estar seguro de quién puede ser el verdadero padre del niño. La regla de Hamilton proporciona una explicación evolutiva de fenómenos como éste, ya que cuantifica el grado en que deberíamos esperar que «la sangre tire».

Insectos sociales

Una especie es eusocial si vive en colonias con generaciones superpuestas, en las que uno o más individuos producen todos los descendientes y el resto sirven de ayudantes estériles. La eusocialidad es rara, excepto entre los himenópteros, el orden de insectos que incluye a las hormigas, las abejas y las avispas. Antes se decía que la verdadera eusocialidad había evolucionado independientemente al menos doce veces en los himenópteros, pero sólo dos en los de

más (los casos excepcionales son las termitas del orden de los isópteros y las ratas topo lampiñas del orden *Rodentia).* Investigaciones posteriores han descubierto otras especies eusociales, la más interesante de las cuales es una gamba *(Decapoda)* que coloniza esponjas en arrecifes de coral, pero la frecuencia de la eusocialidad en los himenópteros sigue siendo un enigma que requiere una explicación.

¿Por qué generó la evolución trabajadores estériles? ¿Por qué trabajan incansablemente por los demás? ¿Por qué se trata de un fenómeno común entre los himenópteros y raro entre las demás especies?

A un determinado nivel, el rompecabezas es sencillo. Los grupos que trabajan juntos suelen ser más productivos que los individuos que actúan por separado. En una colmena o en un hormiguero, un gran número de trabajadores estériles se especializa en proteger a los jóvenes y cuidar de ellos, mientras que la reina se especializa en ser una máquina de poner huevos. A consecuencia de ello, el número total de nuevos miembros producidos es inmensamente mayor que si parejas de abejas u hormigas criaran familias separadas por sí mismas.

Está claro por qué se beneficia la reina, pero ¿qué ganan con ello los trabajadores? Cada cría fértil que produce la reina está relacionada con los trabajadores, son los hermanos y hermanas de los trabajadores. Un gen mutante que se expresa en el cuerpo de un trabajador tiene, por lo tanto, un montón de familiares que contar a la hora de calcu-

lar su aptitud inclusiva. Todos los descendientes fértiles de la reina, ponderados por su grado de relación con un trabajador, deben contarse al calcular el beneficio que para un trabajador tiene esforzarse por ayudar a la reina. La productividad de una colmena o un hormiguero asegura que el balance resulte fuertemente favorable al lado de la eusocialidad.

Todo ello sería igualmente verdadero para la especie humana si tuviéramos un reparto de trabajadores estériles, pero tradicionalmente criamos a nuestros hijos en familias extensas en lugar de en fábricas biológicas. De modo que, ¿por qué la evolución no nos llevó por la misma senda que a los himenópteros?

La respuesta de Bill Hamilton a esta pregunta depende de que los himenópteros sean haplodiploides, lo que significa que los huevos sin fertilizar se convierten en machos haploides y los huevos fertilizados se convierten en hembras diploides. En las especies haploides, cada locus de un cromosoma alberga sólo un gen. Los humanos son diploides, ya que cada locus alberga dos genes, uno de la madre y otro del padre. Es por ello por lo que el grado de relación entre dos hermanas humanas es de una mitad, dado que un hijo recibe un gen de cada padre en cada locus, y el gen que recibe de cada padre tiene la misma probabilidad de ser cualquiera de los dos genes que el progenitor alberga en ese locus. Por el contrario, el grado de relación entre hermanas himenópteras es de tres cuartos, puesto que cada locus de sus cromo-

somas obtiene *el mismo* gen de su padre y un gen obtenido al azar del par aportado por su madre a ese locus. Por consiguiente, los trabajadores tienen una motivación más fuerte para ayudar a sus hermanas fértiles de la que tendrían los humanos en la misma situación. Pero éste no es el fin de la historia.

Robert Trivers señaló que el grado de relación entre trabajadores genéticamente hembra y sus hermanos, los zánganos, es de sólo un cuarto. Si la ratio entre géneros de los himenópteros fuera de 50 contra 50, el grado de relación medio entre un trabajador estéril y un hermano fértil solamente sería, por lo tanto, la media de tres cuartos y un cuarto, que es una mitad: la misma de nuestra propia especie. Sin embargo, en algunas especies de himenópteros, la ratio entre sexos es de cerca de 75 contra 25 a favor de las hembras fértiles (frente a los machos fértiles). ¿Cómo es eso? La respuesta no solamente tiene interés en sí misma, sino que también sirve para completar la explicación de Hamilton de por qué la eusocialidad se ha desarrollado tan frecuentemente entre los himenópteros.

Entre los himenópteros, normalmente son los genes expresados en los trabajadores lo que determina la ratio entre sexos, porque son los trabajadores los que sostienen a los jóvenes. La ratio entre géneros debe por lo tanto hacer al trabajador indiferente entre criar un nuevo macho fértil o una nueva hembra fértil. Esto sólo pasa cuando la ratio entre sexos es de 75 contra 25, porque los pagos a un gen mutante ex-

presado en el cuerpo de un trabajador son entonces de ¾ × ¼ por producir un macho, y de ¼ × ¾ por producir una hembra. Dado que los dos pagos son iguales, puede sobrevivir un equilibrio mixto en el cual las hembras nacen con una probabilidad de tres cuartos, y los machos, con una probabilidad de un cuarto.

Con esta ratio entre sexos, el grado de relación medio que un trabajador tiene con un hermano o hermana fértil es de ¾ × ¾ + ¼ × ¼, que suma ocho octavos. Si el trabajador fuera humano, el grado de relación sería de un medio. Por consiguiente, los trabajadores humanos tendrían que trabajar más duro por una reina humana para obtener los mismos beneficios que un trabajador en un hormiguero o una colmena.

Hay que subrayar que los detalles de esta historia abiertamente simple resultan controvertidos entre los biólogos. Incluso aquellas especies que más se acercan a esta historia se desvían de modos idiosincrásicos. Pero creo que el hecho de que la teoría de juegos permita a los biólogos evolutivos explicar las ratios entre géneros en especies para las que no son simétricas constituye una de las demostraciones más convincentes de que debemos de estar haciendo algo bien.

Quedan muchos misterios, por supuesto. ¿Por qué los himenópteros son haplodiploides? ¿Cómo es que algunas especies de este orden son eusociales? ¿Qué hay de las colonias con múltiples reinas? ¿Qué hay de la *Pachycondyla villosa*, especie en la que rei-

nas *sin parentesco* aparentemente fundan colonias juntas? ¿Qué hay de los múltiples enigmas que plantean las termitas? Los creacionistas se valen de este reconocimiento de ignorancia para desacreditar a la biología evolutiva, pero creo que estas críticas simplemente revelan la incapacidad para entender cómo funciona la ciencia.

La evolución de la cooperación

Ya sabemos que la cooperación puede sostenerse entre animales que no se encuentran relacionados por los mecanismos a los que Bob Trivers llamó «altruismo recíproco». Un ejemplo maravilloso lo ofrece el murciélago vampiro *(Desmodus rotundis)*.

Los murciélagos vampiro duermen juntos colgados en cuevas durante el día, y por la noche buscan un animal al que chuparle la sangre. Cerca de un 8% tiene éxito, lo que representa un gran problema para los murciélagos, que necesitan alimento cada 60 horas aproximadamente. Por esta razón, la presión evolutiva a favor de compartir es muy fuerte. Gerald Wilkinson descubrió que los murciélagos vampiro comparten sangre de un modo recíproco con compañeros de cueva que no siempre son familiares suyos. En resumen, es más probable que un vampiro regurgite sangre para un compañero de cueva suplicante si dicho compañero ha compartido sangre con él en el pasado.



FIGURA 31. Murciélago vampiro.

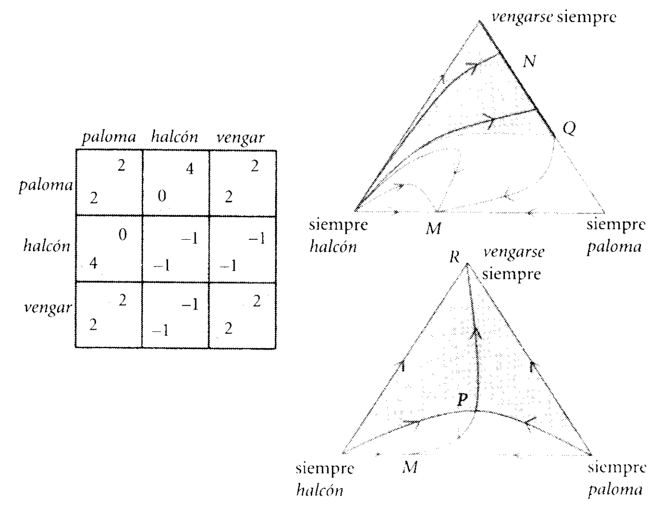
¿Cómo puede ponerse en marcha una cooperación como ésta? Axelrod ha enturbiado las aguas al afirmar que había demostrado que el Toma y daca es una EEE en el Dilema del Prisionero repetido indefinidamente. Aunque Maynard Smith respaldó equivocadamente la declaración, resulta obvio que no es cierta. Una población de Toma y dacas puede ser invadida por una estrategia que siempre juegue *paloma*. Ese mutante no desplazaría al Toma y daca, pero tampoco sería expulsado.

No hay estrategia pura que pueda constituir una EEE en el Dilema del Prisionero repetido indefinidamente: una mutación que cambie la estrategia en un subjuego no alcanzado nunca será detectada, por no decir eliminada. El concepto de EEE debe ser amplia-

do para resultar útil en un contexto como ése, de modo que todos los conjuntos de estrategias a través de las cuales una población puede transitar se consideren agregados evolutivos estables. Por ejemplo, el conjunto *N* tanto en la Figura 14 como en la Figura 32 es un tipo de atractor asintótico agregado, dentro del cual el sistema es libre de variar de una estrategia a otra (no es necesario que haya una trayectoria que aleje de *N*, como en ambos casos).

El Juego del Halcón, la Paloma y el Vengador

El problema ya se hace evidente en el Juego del Halcón, la Paloma y el Vengador con el cual Maynard Smith y Price analizaron originariamente la evolución de la cooperación. Un vengador juega como un halcón contra un halcón y como una paloma contra una paloma. La estrategia *venganza* está débilmente dominada, de modo que el juego tiene un equilibrio de Nash simétrico en el cual la *venganza* nunca se juega. Como en el Juego del Halcón y la Paloma, *paloma* se juega con probabilidad 1/3 y *halcón* con probabilidad 2/3. En el triángulo superior de la Figura 32, este equilibrio mixto se marca con la letra *M*. También hay una infinidad de equilibrios de Nash en los cuales nunca se juega *halcón*, marcados en la Figura 32 con la letra *N*. Éstos requieren que *venganza* se juegue con una probabilidad de al menos 3/5.



	paloma	halcón	vengar
paloma	2, 2	0, 4	2, 2
halcón	4, 0	−1, −1	−1, −1
vengar	2, 2	−1, −1	2, 2

FIGURA 32. Juego del Halcón, la Paloma y el Vengador. El triángulo superior muestra la dinámica del replicador en el juego puro. Una mezcla de población se considera distribuida según las tres esquinas del triángulo. El punto que lo representa está situado en el centro de gravedad de esta distribución. El triángulo inferior muestra la dinámica del replicador cuando los vengadores cuentan con una ligera ventaja frente a las palomas, y los halcones, una ligera ventaja sobre los vengadores.

El triángulo superior muestra las dinámicas del replicador del Juego del Halcón, la Paloma y el Vengador. El conjunto sombreado es la cuenca de atracción del conjunto *N*. Maynard Smith y Price pasan por alto este conjunto porque sólo *M* constituye una EEE. No obstante, si el sistema encontrara la forma de llegar a *N*, su única oportunidad de escapar es

que aparezca una nueva mutación *halcón* cuando esté cerca de Q. Pero este improbable acontecimiento podría demorarse mucho tiempo. De hecho, han tenido lugar periodos extremadamente largos de estabilidad en la evolución de muchas especies que podrían atribuirse a esta causa.

El triángulo inferior de la Figura 32 muestra la dinámica del replicador de una versión modificada del Juego del Halcón, la Paloma y el Vengador, en la cual se supone con realismo que el vengador sale un poco mejor parado ante una paloma y un poco peor parado ante un halcón. Este juego tiene tres equilibrios de Nash simétricos: uno es análogo al equilibrio *M* del Juego del Halcón y la Paloma; otro es un equilibrio puro *R* en el que sólo se juega *venganza*; y el tercero, un equilibrio *P* en el cual las tres estrategias se juegan con una probabilidad positiva. Los equilibrios *M* y *R* corresponden a estrategias EEE.

La cuenca de atracción de *R* se muestra sombreada en la Figura 32. Dado que se trata de un conjunto amplio, tenemos un modelo básico en el que tiene sentido aplicar el concepto de EEE y que ofrece el punto de partida de una explicación de la evolución de la cooperación. Maynard Smith y Price expanden el modelo mediante la introducción de un tipo bravucón que se muestra como un vengador, pero que ante un desafío cede. Los bravucones desplazan a las palomas, pero, por lo demás, poco cambia.

No obstante, la aplicación más interesante del Juego del Halcón, la Paloma y el Vengador se reali-

za sobre el caso de la interacción local. En la vida real, los animales juegan mayoritariamente a juegos con los que geográficamente les son vecinos. Por lo tanto, el azar puede fácilmente arreglárselas para que un vengador mutante llegue a ser numeroso en un vecindario pequeño. Entonces, el Juego del Halcón, la Paloma y el Vengador nos indica que el resto de estrategias se extinguirá gradualmente en ese vecindario. Y a continuación pasará lo mismo con vecindarios que se superpongan hasta que todo el medio sea tomado por vengadores.

Ésta me parece la mejor explicación de la evolución de la cooperación mediante un modelo básico que se propone comúnmente.

Evolución social o cultural

A veces se piensa que sólo debería hablarse de evolución si la analogía con la evolución biológica es muy cercana. La verdad es que los replicadores no solamente surgen en un contexto biológico.

Las reglas generales, los códigos de conducta, las modas, los estilos de vida, los credos y las ideas científicas son siempre replicadores de un tipo u otro. Richard Dawkins se refiere a dichos replicadores culturales como «memes», los cuales se extienden de una mente humana a otra por imitación o educación.

Solía mostrarme entusiasta respecto a los memes, pero ahora que entendemos que la dinámica

del replicador no sólo emerge en modelos básicos de reproducción biológica, sino también en modelos básicos de aprendizaje por imitación y estímulo-respuesta, parece innecesario que nos encadenemos al paradigma de los memes. Cuando las dinámicas adaptativas nos llevan al equilibrio de Nash de un juego, estoy dispuesto a hablar de evolución cultural.

Podría parecer que la principal diferencia en la aplicación de dinámicas evolutivas entre la biología y las ciencias sociales es que los biólogos normalmente están muy bien informados sobre las fuentes de variaciones interesantes, mientras que los científicos sociales sólo pueden intentar adivinar. Por ejemplo, un modelo evolutivo de economía debe tener en cuenta el hecho de que las mutaciones en forma de nuevos planes para ganar dinero aparecen todo el tiempo; ahora bien, si los economistas pudieran predecir cuál de ellos iba a tener éxito, ¡serían todos ricos!

9. Negociación y coaliciones

La mitad de *Teoría de Juegos y comportamiento económico,* de Von Neumann y Morgenstern, está dedicada a juegos de suma cero con dos jugadores. En esa parte del libro es donde nace la teoría de juegos *no cooperativa* que hemos estudiado hasta ahora. En esta teoría, las oportunidades estratégicas de los jugadores se exploran en detalle y se hacen predicciones sobre su comportamiento empleando la idea del equilibrio de Nash. La otra mitad del libro de Von Neumann y Morgenstern trata de la teoría de juegos *cooperativa.*

El uso de las palabras es una fuente interminable de confusión, porque los críticos suponen equivocadamente que la teoría de juegos no cooperativa trata exclusivamente del conflicto, mientras que la teoría de juegos cooperativa trata exclusivamente de la cooperación. Tienen razón en la medida en que la teoría de juegos cooperativa se centra en buena parte en

cómo unos individuos racionales cooperarán, ¿qué coaliciones se formarán?, ¿qué parte del pastel conseguirá cada uno? Pero se equivocan cuando tratan la teoría de juegos cooperativa y no cooperativa como perspectivas antitéticas en las que el Doctor Jeckyll y Mr. Hyde se erigen como paradigmas enfrentados sobre la condición humana. Después de todo, el Teorema Popular forma parte de la teoría de juegos no cooperativa, pero su principal interés radica en mostrar de qué modo puede sostenerse la cooperación como comportamiento de equilibrio en juegos repetidos.

La teoría de juegos cooperativa sólo difiere de la teoría de juegos no cooperativa en que abandona cualquier pretensión de explicar *por qué* la cooperación sobrevive en nuestra especie. En lugar de ello, propone que los jugadores tengan acceso a una «caja negra» que no es objeto de un modelo, y cuyos contenidos de algún modo resuelven todos los problemas de compromiso y confianza que nos han preocupado periódicamente a lo largo de este libro. Entre otras cosas, esta caja negra debe contener una explicación de cómo las negociaciones previas al juego relativas a de qué manera debe jugarse éste pueden resultar en un acuerdo que los jugadores traten como un compromiso incondicional.

En las aplicaciones económicas a veces puede argumentarse que la caja negra contiene todo el aparato del sistema legal y que, por tanto, los jugadores respetan los contratos por miedo a una demanda ju-

dicial si no lo hacen. En las aplicaciones sociales, la caja negra puede contener las razones por las cuales los jugadores se preocupan por el efecto que un comportamiento deshonesto en el presente puede tener en el futuro sobre su reputación de comportamiento fiable. Incluso puede argumentarse que la caja negra contiene el resultado del condicionamiento de nuestra niñez o una aversión instintiva al comportamiento inmoral.

La falacia utópica consiste en imaginar que la caja negra de la teoría de juegos cooperativa no contiene nada más que la fervorosa esperanza de que el conflicto desaparecería sólo con que la gente se comportara racionalmente. Hay que reconocer que en la vida real gran parte del conflicto es estúpido, pero no haremos que la gente sea menos estúpida enseñándole que su corazón es más racional que su cabeza.

La forma de responder a la falacia utópica consiste en abrir la caja negra cooperativa y dedicarle una mirada larga e inquisitiva a lo que tiene dentro. ¿Cómo se explica que los jugadores confíen el uno en el otro en algunas situaciones y no en otras? ¿Por qué no lucha cada uno por sus propios intereses en lugar de hacerlo por los del grupo al que pertenece?

Cuando se busca una respuesta a estas preguntas, no hay otra alternativa que emplear los métodos de la teoría de juegos no cooperativa. Por lo tanto, la teoría de juegos no cooperativa consiste en el estudio de juegos en los cuales cualquier cooperación que pueda surgir queda completamente explicada

por la elección de estrategias hecha por los jugadores. Pero esto puede resultar muy duro. La teoría de juegos cooperativa esquiva todas las difíciles preguntas de *por qué* con la esperanza de encontrar caracterizaciones simples de *qué* acuerdos alcanzarán finalmente los jugadores racionales.

El programa Nash

El programa Nash nos invita a abrir la caja negra cooperativa para analizar si el mecanismo que alberga funciona realmente del modo que supone un determinado concepto de solución cooperativa.

Nash observó que cualquier negociación es, en sí misma, una especie de juego en el cual los movimientos son todo lo que los jugadores puedan decir o hacer durante el proceso. Si modelizamos de esta manera cualquier negociación que precede al desarrollo de un juego, el resultado es un juego ampliado. Una estrategia para este juego de la negociación le dice primero a un jugador cómo conducir las negociaciones previas al juego y a continuación cómo jugar al juego en sí con arreglo al resultado de las negociaciones.

Los juegos de negociación deben estudiarse sin presuponer una negociación previa al juego, pues toda actividad previa ya ha sido integrada en sus reglas. Analizarlos es pues una tarea para la teoría de juegos no cooperativa. De modo que buscamos sus

equilibrios de Nash con la esperanza de que el problema de selección de equilibrios no resulte demasiado dificultoso.

Cuando los juegos de negociación pueden resolverse con éxito, tenemos una forma de investigar la teoría de juegos cooperativa. Si un concepto cooperativo de solución predice el resultado de un acuerdo racional sobre cómo jugar un determinado juego, un análisis no cooperativo del juego de la negociación ampliado tendría que ofrecer la misma respuesta.

Por consiguiente, Nash consideraba las teorías cooperativa y no cooperativa de los juegos como maneras complementarias de afrontar el mismo problema. La teoría de juegos cooperativa ofrece predicciones sobre acuerdos racionales que resultan fáciles de aplicar. La teoría de juegos no cooperativa proporciona un modo de poner a prueba dichas predicciones.

La solución negociadora de Nash

Una mansión en Beverly Hills vale 4 millones de dólares para sus propietarios y 5 millones de dólares para un comprador potencial. Al reunirse y negociar su venta, el comprador y el vendedor pueden crear un excedente de 1 millón de dólares; cómo se reparte el excedente entre ellos se decide por negociación. Un modelo simple que captura la esencia de este ar-

quetípico problema de negociación se conoce tradicionalmente como «Divide el dólar».

La historia que acompaña al modelo presenta a un filántropo que ofrece a Alice y Bob la oportunidad de repartirse un dólar con la condición de que puedan acordar una forma de dividirlo entre los dos. Si no pueden llegar a un acuerdo, el filántropo se quedará su dólar. En esta historia, el dólar representa el excedente que negocian los dos agentes económicos. La condición del filántropo que establece que sólo podrán disponer del dólar si Alice y Bob pueden llegar a un acuerdo representa el hecho de que no habrá excedente a menos que los agentes se junten para crearlo.

Cuando Nash analizó el problema, los economistas ortodoxos sostenían que la racionalidad es irrelevante para el tema, ya que el resultado depende de lo hábilmente que negocien Alice y Bob. Por lo tanto, la negociación se consideraba un problema de psicología más que de economía. Incluso Von Neumann y Morgenstern respaldaron este punto de vista en su libro *Teoría de Juegos y comportamiento económico*. Cuando se hablaba sobre negociaciones treinta años más tarde, descubrí que a los que interrumpen en las conferencias les sigue entusiasmando la idea de que «la negociación no forma parte de la economía». Mirando atrás, parece sorprendente que una noción tan rara haya cosechado una aceptación tan extendida, pero el pasado es realmente un país extraño.

El argumento de Nash

John Nash empezó a reflexionar sobre la negociación cuando se matriculó en un único curso de economía sobre comercio internacional como parte de sus estudios de licenciatura. El resultado de sus reflexiones acabó por desmontar la visión ortodoxa que establece que el problema de la negociación es indeterminado.

Hay que recordar que podemos identificar la utilidad con dinero en el caso de un jugador neutral al riesgo. Si Alice y Bob son neutrales al riesgo en el juego de Divide el dólar, no hay que ser un genio para predecir que dividirán el dólar en dos fracciones iguales si ambos tuvieran acceso a las mismas oportunidades estratégicas en el juego de negociación al que jueguen. Pero ¿qué pasaría si tuvieran diferentes actitudes hacia el riesgo? Si Bob es más averso al riesgo que Alice, tendrá más miedo al desacuerdo que ella, así que acabará con una fracción más pequeña del dólar. Más pequeña, sí, pero ¿cuánto?

La forma de Nash de descubrir la respuesta se ilustra en la Figura 33. El primer paso consiste en identificar cada posible acuerdo con la pareja de utilidades que Alice y Bob conseguirían si se implementara el acuerdo. El punto de desacuerdo resultante de que no se alcance un acuerdo se llama *statu quo*. La forma del conjunto de todos los acuerdos posibles es convexa cuando tanto Alice como Bob son aversos al riesgo.

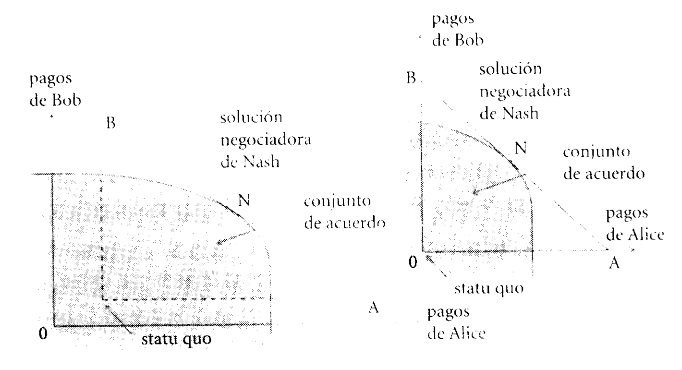


FIGURA 33. Solución negociadora de Nash.

Nash supone que un acuerdo racional se encontrará en algún punto de la frontera del conjunto de todos los acuerdos posibles, pues de otro modo los jugadores podrían encontrar un acuerdo más eficiente que ambos preferirían (misteriosamente, los economistas denominan a esta observación «teorema de Coase», aunque ni es un teorema ni es obra del ganador del Premio Nobel Ronald Coase). A partir de ahí, Nash dibujó una tangente en la frontera del conjunto de acuerdos en el punto que representa el acuerdo racional.

El siguiente paso consiste en resituar los ceros en las escalas de utilidad de Alice y Bob en el statu quo. A continuación, las unidades de sus escalas de utilidad se ajustan para hacer que la pendiente de la tangente en el acuerdo racional equivalga a 45°. El diagrama a la derecha de la Figura 33 muestra la nueva

situación. Si el conjunto de acuerdos fuera el triángulo sombreado de este diagrama, el acuerdo racional debería ser el punto central de la hipotenusa (por la misma razón por la que acordamos que el acuerdo racional sería de 50-50 en el Juego de Divide el dólar si tanto Alice como Bob son neutrales al riesgo).

El último paso consiste en argumentar que el acuerdo racional debe permanecer inalterado cuando retiramos todos los puntos del triángulo sombreado de la derecha de la Figura 33 que no se encuentran en el conjunto de acuerdos de color sombreado oscuro. Nash las llamaba «alternativas irrelevantes» porque ni Alice ni Bob elegían una de ellas cuando estaban disponibles y, por lo tanto, no tienen razón alguna para cambiar el acuerdo cuando dejan de encontrarse disponibles.

Por lo tanto, para encontrar la solución negociadora de Nash en el diagrama de la izquierda de la Figura 33, sólo nos hace falta localizar la tangente que toca el punto central de la frontera del conjunto de acuerdos.

¿Qué parte de las tareas del hogar debería hacer cada uno?

A los periódicos les gusta echar leña el fuego en la guerra de sexos cuando las cifras de ventas andan mal. Ésta es una cita típica: «Los hombres dicen res-

petar la igualdad de derechos en el hogar, mientras dejan que las mujeres realicen tres cuartas partes de las tareas domésticas». A igualdad del resto de condiciones, el hecho de que las mujeres hagan más tareas domésticas que sus maridos realmente mostraría que el equilibrio de poder en los matrimonios se encuentra sesgado a favor de los hombres; pero, ¿son iguales el resto de las condiciones?

Alice y Bob se casan. No están interesados en disfrutar otro beneficio del matrimonio que el de compartir las tareas domésticas. Al estilo moderno, acuerdan un contrato matrimonial que especifica cuántas horas de trabajo doméstico aportará cada uno a la semana. ¿Qué acuerdo predecirá la solución negociadora de Nash?

En la versión básica del problema, Alice considera que en un hogar deben dedicarse dos horas diarias a tareas domésticas; Bob cree que una hora al día es adecuada. Cada jugador obtiene un beneficio de 100 útiles a la semana si como mínimo se llevan a cabo las horas de trabajo doméstico que consideran apropiadas; por debajo de su mínimo, no obtienen beneficio alguno de ninguna tarea doméstica.

Ni a Alice ni a Bob les gusta realizar tareas domésticas. Alice pierde 5 útiles a la semana por cada hora que dedica a las tareas domésticas. Bob pierde 10 útiles por hora, porque le desagrada hacer tareas del hogar más que a Alice. Por lo tanto, en la situación de statu quo previa al matrimonio, Alice hacía 14 horas de trabajo doméstico a la semana, del que ob-

tenía una utilidad de 30 útiles; Bob dedicaba 7 horas a las tareas domésticas, que también le proporcionaban una utilidad de 30 útiles.

El teorema de Coase establece que el resultado del acuerdo será eficiente, lo que significa que Alice se saldrá con la suya en cuanto al número de horas que deben dedicarse a las tareas domésticas en el nuevo hogar. Para hallar la solución negociadora de Nash, debemos encontrar los resultados extremos que hacen que el matrimonio valga la pena para ambos cónyuges. Un extremo consiste en que Alice haga todo el trabajo doméstico; entonces conseguirá 30 útiles y Bob 100 útiles. El otro extremo se da cuando es Bob el que sólo consigue 30 útiles; en ese caso efectúa una hora de trabajo al día. Alice debe hacer otra hora de trabajo para completar las dos horas diarias que considera necesarias. En tal caso, la utilidad de ella asciende hasta 65 útiles.

Como el modelo se ha diseñado de modo que Alice y Bob sean neutrales al riesgo, la solución negociadora de Nash se encuentra en la media de los dos extremos. Así que cada semana Alice acabará con 47,5 útiles y Bob con 65 útiles. Para que esto suceda, Alice tendrá que trabajar 10,5 horas a la semana y Bob sólo 3,5 horas a la semana.

Por consiguiente, la solución negociadora de Nash establece que si Alice y Bob negocian sobre una base equitativa, Alice se saldrá con la suya en cuanto al número de horas de trabajo doméstico que se realizan a la semana, pero tendrá que hacer

tres cuartas partes del trabajo. Si en la realidad es cierto que las casadas hacen el triple de trabajo doméstico que las solteras, nuestro modelo básico demuestra que ello no significa necesariamente que el equilibrio de poder en los matrimonios esté sesgado a favor de los hombres. ¿Cuántas horas dedicaría cada uno a las tareas domésticas si todos los factores excluidos del modelo básico se tuvieran en cuenta? Aunque lo supiera, ¡no lo diría!

El modelo de negociación de Rubinstein

De acuerdo con su programa, Nash defendía su solución negociadora con un modelo de negociación no cooperativa en el cual Alice y Bob se comprometen simultáneamente con demandas de «lo tomas o lo dejas». No obstante, Schelling posteriormente pudo poner en duda con éxito el realismo de atribuir capacidad de compromiso a los jugadores en juegos de negociación.

Por ejemplo, si Bob pudiera ser más rápido que Alice al realizar un compromiso irrevocable en el Juego de Divide el dólar, podría llevarse todo el bote pidiendo 99 centavos, lo que dejaría a Alice en la disyuntiva de elegir entre un penique o nada. Pero ¿cómo puede convencer Bob a Alice de que se encuentra totalmente comprometido con su decisión y de que nada de lo que ella pudiera hacer podría hacerle cambiar su petición? ¿Quién cree a alguien que

afirma que ahora está haciendo su «oferta última y definitiva»? Incluso los precios anunciados en objetos caros de tiendas de moda raramente son finales. El vendedor intentará que te sientas como un avaricioso por pelear por un mejor precio, pero por una vez la sabiduría popular tiene razón. Todo es negociable. Nunca aceptes un no como respuesta.

Establecer compromisos es verdaderamente difícil. A veces la gente se forja una carrera a base de construirse una reputación de persona obstinada o estúpida a este respecto. Ocasionalmente, los sindicalistas son capaces de comprometerse mediante el voto a líderes intransigentes, pero, aparte de circunstancias especiales, el vocabulario del compromiso a menudo no es más que parloteo barato. No obstante, si todas las amenazas fueran creíbles, hemos aprendido que debemos buscar los equilibrios de perfección en el subjuego.

Por tanto, ¿qué pasa cuando cualquier cosa que diga un jugador deba ser creíble antes de que el otro jugador la crea? Esta pregunta llevó a Ariel Rubinstein a hacer la más importante de todas las contribuciones al programa Nash. En el modelo no cooperativo de negociación más natural, Alice y Bob alternan en la presentación de ofertas del uno al otro hasta que alcanzan un acuerdo. Si se supone que prefieren llegar a un acuerdo determinado ahora en lugar de más tarde, Rubinstein demostró que el modelo de valoración de opciones tiene un único equilibrio de perfección en el subjuego.

Mi propia contribución consistió en demostrar que el único resultado que constituye un equilibrio de perfección en el subjuego se aproxima a una versión asimétrica de la solución negociadora de Nash cuando el intervalo de tiempo entre las sucesivas ofertas es lo suficientemente pequeño. En la versión simétrica de la solución negociadora de Nash, la relación *NB/AN* de la Figura 33 es igual a 1. En la versión asimétrica, *NB/AN* es igual a la relación entre las tasas de descuento de Alice y Bob por el paso del tiempo.

Si hacemos que Alice sea más paciente que Bob, la tasa de descuento de ella decrecerá y, por consiguiente, la versión asimétrica de la solución negociadora de Nash predice que conseguirá una parte mayor del excedente a dividir.

¿Qué es lo importante al negociar?

Cuando conocí a Ariel Rubinstein, me contó que había estado trabajando sin éxito en el problema de la negociación. Dado que su teorema demostró tener un papel central en la destrucción de la ortodoxia según la cual el problema de la negociación es indeterminado, su comentario se basaba en un juicio excesivamente humilde. Pero las razones por las que se juzgaba tan duramente a sí mismo continúan existiendo.

Todo el trabajo sobre negociaciones que se ha resumido hasta este momento supone que la informa-

ción es completa. Sin embargo, ¿con qué frecuencia los negociadores reales conocen las preferencias del otro?

Cuando Alice intenta venderle una casa a Bob, le gustaría saber la cantidad máxima que éste estaría dispuesto a pagar, pero Bob no se la comunicará. Tampoco le dirá ella cuál es el precio mínimo que está dispuesta a aceptar. Dichas asimetrías en la información tienen una relevancia capital; en concreto, el teorema de Coase no funciona. Roger Myerson ha demostrado que si todos conocen que las valoraciones de Alice y Bob son independientes y tienen una probabilidad igual de encontrarse en cualquier punto entre los 4 y los 5 millones de dólares, el resultado de la negociación óptima es, en realidad, muy ineficiente. Aun cuando se elige el proceso de negociación para maximizar el excedente esperado que puedan lograr los negociadores racionales, ¡la casa sólo se vende cuando para Bob vale 250.000 dólares más que para Alice!

La información se impone a todos los demás criterios, pero nadie sabe de qué manera se puede obtener una sola predicción del modelo de la negociación de Rubinstein cuando la información es incompleta. Por lo tanto, los principios siguientes solamente gozan de fundamentos sólidos cuando los negociadores se muestran incapaces de ocultarse secretos el uno al otro.

Compromiso

A Alice le conviene convencer a Bob de que no puede aceptar menos de lo que está pidiendo, pero debería considerar cualquier intento de éste de expresar un compromiso similar con gran escepticismo. Algunas veces, incluso, tu oponente se revelará como un pusilánime. Por ejemplo, en una ocasión, cuando le pregunté a la empleada de un alquiler de coches qué descuentos se ofrecían sobre el precio que acababa de presentarme, me contestó: un 20%.

Riesgo

Las actitudes de los jugadores ante la toma de riesgos determinan la forma del conjunto de acuerdos. Cuanta mayor es tu aversión al riesgo, menos consigues. Los vendedores de coches usados fingen una ligera despreocupación ante la perspectiva de perder una venta. Pero, como dice la Biblia, «aunque digan que no es nada, cuando se vayan, se jactan de ello».

Tiempo

La paciencia relativa de los jugadores determina cuánta asimetría debe introducirse en la solución negociadora de Nash. Cuanto más impaciente seas, menos consigues. En un reciente caso judicial en el

que estuve implicado, el regulador del mercado de las telecomunicaciones había ordenado que la empresa líder en telefonía fija tenía que negociar con un nuevo competidor entrante por el precio que cargaría por conectar a los clientes del competidor entrante con sus propios clientes. Pero en ausencia de una orden sobre *cuándo* debía ponerse en práctica el acuerdo, la empresa de telefonía fija podía permitirse tener una paciencia infinita y, de esa manera, apropiarse de todos los beneficios del sector.

¿Jugar limpio?

Un *best seller* sobre negociación despreció el uso de estrategias, a las que tildaba de trampas. Simplemente debería insistirse en lo que es justo. ¡Quizás sea ésta la razón por la que un estudio sobre la negociación salarial colectiva en Suecia presentó 24 definiciones de lo que se considera justo!

Ciertamente, la reputación de ser obstinado por razones religiosas o ideológicas puede a veces resultar útil a la hora de negociar. Por ejemplo, en *El perfecto comerciante inglés,* Daniel Defoe explica que era contrario a los principios religiosos de los cuáqueros de aquellos tiempos «mentir» pidiendo un trato mejor del que ya estarían dispuestos a aceptar. Por lo tanto, eran negociadores exitosos, porque se sabía que su primera oferta sería su oferta final. Pero ¿qué pasaría si su oponente intentara adoptar la misma

táctica de compromiso? La guerra es la consecuencia habitual de que dos naciones dejen de lado la racionalidad de este modo.

Nada de esto tiene por qué implicar que la justicia sea, de un modo u otro, irracional. Por el contrario, me parece que es la más importante de las convenciones que los humanos emplean para resolver los problemas de selección de equilibrios en los juegos de coordinación cotidianos. No obstante, en lugar de considerar la justicia como un sustituto para los compromisos alcanzados mediante la negociación racional, la *Teoría de la justicia* de John Rawls convierte la negociación racional en la primera piedra de su definición de un resultado justo. Rawls identifica un trato justo con el acuerdo que alcanzarían Alice y Bob si fueran a negociar tras un «velo de ignorancia» que ocultara su identidad durante la negociación. Por lo tanto, ni Alice ni Bob querrían poner a nadie en desventaja, porque ellos mismos podrían resultar la parte que sufriera la desventaja.

He dedicado una parte sustancial de mi vida a usar la teoría de juegos para analizar las implicaciones de la definición de Rawls. ¿Por qué nos sorprende por ser razonable? ¿Lleva a un resultado utilitarista como afirma Harsanyi o a un resultado igualitario como afirma Rawls? En todo caso, la vida es demasiado corta para explicar por qué creo que Rawls defendía una institución sólida con un argumento equivocado.

Formación de coaliciones

¿Cómo puede aplicarse lo que hemos aprendido sobre el modo de negociar de dos personas racionales a la negociación que tiene lugar cuando se forman coaliciones? Von Neumann y Morgenstern propusieron el modelo básico más simple en el que las coaliciones son relevantes.

Alice, Bob y Carol van a jugar a Divide el dólar. Qué va a conseguir cada uno se determina por mayoría de votos. Por lo tanto, cualquier coalición entre dos jugadores puede disponer del dólar como éstos deseen. Pero ¿qué coalición se formará?, ¿quién se quedará descolgado?, ¿cómo se dividirá el dólar?

Opción externa

La opción externa de Alice cuando negocia con Bob consiste en lo máximo que puede conseguir en otro lado si las negociaciones se rompen del todo. Los economistas siguen cometiendo el error de identificar los pagos del statu quo con los de las opciones externas de los jugadores cuando usan la solución negociadora de Nash para calcular el resultado de las negociaciones salariales. Por ejemplo, si Bob se va a quedar sin empleo si no llega a un acuerdo con Alice, se considera que su pago statu quo es el nivel de prestaciones sociales.

Para entender por qué suele ser un error emplear la solución negociadora de Nash de este modo, es ne

cesario modificar el modelo de negociación de Rubinstein de modo que Alice y Bob siempre tengan la oportunidad de elegir la opción externa tras rechazar una oferta. En ese caso se hace evidente que las opciones externas son relevantes para el resultado de la negociación sólo en la medida en que debamos descartar todos los pares de pagos del conjunto de acuerdos que le asignen a alguien menos de lo que le ofrece su opción externa. El statu quo debe identificarse con los pagos que los jugadores reciben *durante* la negociación. Por ejemplo, si Alice y Bob quieren negociar el fin de una huelga, sus pagos del statu quo son los de sus respectivos ingresos *durante* la huelga.

Para que fuera correcto identificar los pagos del statu quo con las opciones externas de los jugadores, cualquier ruptura de las negociaciones debe ser forzada en lugar de voluntaria. Para modelizar una ruptura tan forzada del modelo de Rubinstein, puede introducirse un movimiento aleatorio que ponga fin a las negociaciones con una probabilidad pequeña después de cada desacuerdo. Ello se correspondería con el caso en que cualquier demora en alcanzar el acuerdo pudiera resultar en que el excedente por el que negocian Alice y Bob fuera robado por un tercero.

El Excluido

Nuestra versión para tres jugadores de Divide el dólar puede considerarse como tres problemas de ne-

gociación de dos jugadores a los que podemos aplicar la teoría de negociación cooperativa de Nash. Cuando dos jugadores negocian sobre cómo dividir el dólar si llegaran a acordar la formación de una coalición sobre cómo votar, sus opciones externas son los acuerdos que tomarían si cada uno tuviera que negociar con el jugador excluido en lugar de con su actual oponente.

De ello se deduce que Alice debe esperar el mismo pago si tiene éxito en la formación de una coalición con Bob que si tuviera éxito en la formación de una coalición con Carol –de otro modo uno de los acuerdos potenciales le exigiría aceptar una cantidad menor que su opción externa–. Junto al teorema de Coase, este hecho determina los tres acuerdos posibles. En el caso en el que todos los jugadores sean neutrales al riesgo, llegamos a la nada sorprendente conclusión de que la coalición que se forma dividirá el dólar al 50% y dejará al excluido sin nada.

La simetría del problema hace imposible decir cuál de las tres posibles coaliciones se formará. No obstante, el siguiente modelo no cooperativo rompe la simetría al requerir que Alice, Bob y Carol roten a la hora de hacer demandas de pagos. Cuando es tu turno de juego, puedes aceptar cualquier demanda que se haya realizado anteriormente o bien expresar otra demanda propia. El único equilibrio de perfección en el subjuego predice que Alice y Bob aprovecharán la primera oportunidad de formar una coalición. Para que su reparto del dólar se aproxime a nuestra pre-

dicción cooperativa, el intervalo de tiempo entre demandas sucesivas tiene que ser muy pequeño.

Núcleo

¿Qué puede decirse de la formación de coaliciones en situaciones más generales? Una propuesta llamaría a rechazar el perfil de pagos como el resultado de una posible solución si alguna coalición puede poner objeciones a este perfil de pagos porque es capaz de imponer otro alternativo que todos sus miembros prefieren. El conjunto de todos los perfiles de pagos a los que no se puede poner objeciones se denomina *núcleo* de un juego cooperativo.

A los economistas les gusta la idea porque el núcleo de un juego de mercado lo suficientemente grande se aproxima a lo que pasaría si compradores y vendedores comerciaran a unos precios que igualaran oferta y demanda. No obstante, aplicar la idea al Excluido en el caso en que todos los jugadores sean neutrales al riesgo no es demasiado esperanzador.

Hemos observado que una solución posible al Excluido consiste en que Alice y Bob formen una coalición con el acuerdo de que votarán a favor de dividir el dólar, de modo que cada uno consiga 50 centavos. Pero este resultado no puede estar en el núcleo, porque Bob y Carol pueden objetar que ellos pueden imponer un resultado que ambos prefieren, y que consiste en dividir el dólar de modo que Bob consiga

51 centavos y Carol 49. Dado que puede emplearse un razonamiento similar para excluir cualquier perfil de pagos, sea como sea, el núcleo del Juego del Eliminado se encuentra vacío.

La paradoja de Condorcet

El marqués de Condorcet era un idealista revolucionario francés que descubrió un problema similar cuando exploraba posibles sistemas de votación.

Si Alice y Bob forman una coalición que deje a Carol en desventaja, ésta ofrecerá a todo aquel que esté dispuesto a escucharla un poco más de lo que en esos momentos obtiene. Si Bob acepta la oferta de Carol y abandona a Alice, Alice se convertirá en la parte en desventaja y tendrá incentivos para ofrecerle a Carol un poco más de lo que consigue en ese momento. Si Carol acepta, Bob tentará a Alice. Y así sucesivamente.

En la vida real, los resultados pueden ser devastadores. Por ejemplo, la frontera entre Inglaterra y Gales, donde vivo, fue un campo de batalla durante siglos. Los poderosos señores del lado inglés guardaban la frontera o marchaban contra las incursiones de las tribus galesas, pero en realidad la guerra era continua, puesto que los galeses, el rey de Inglaterra y el señor fronterizo local cambiaban de alianza para unirse contra aquel de los tres que en aquel momento fuera más poderoso.

La vida de Condorcet no resultó en absoluto mejor que la de las víctimas de los inestables sistemas sociales que fue capaz de identificar. Tenía la esperanza de crear una utopía mediante el razonamiento matemático, pero en lugar de ello lo condenaron a la guillotina.

Conjuntos estables

Von Neumann y Morgenstern entendieron que no sería inteligente que Bob escuchara a Carol en el Juego del Excluido cuando ella le explica que puede conseguir 51 centavos si se une a ella en coalición en lugar de los 50 centavos que le ha prometido Alice. Si es una buena idea dejar de lado a Alice cuando Carol le tienta, será una buena idea que Carol lo deje de lado cuando a ella la tiente Alice.

Para plasmar esta idea, Von Neumann y Morgenstern se inventaron un concepto que en la actualidad se conoce como *conjunto estable*. Sostenían que deberían pasarse por alto las objeciones que en sí mismas no constituyeran una posible solución; todo lo que quede fuera del conjunto estable queda excluido porque puede encontrarse una objeción que pertenezca al conjunto estable, mientras que lo que quede dentro del conjunto estable sólo necesita ser inmune a otras objeciones pertenecientes al conjunto estable.

El principal ejemplo se encuentra en el Juego del Eliminado, cuando todos los jugadores son neutra-

les al riesgo. Un conjunto estable consiste en tres resultados posibles, en los cuales el dólar se divide equitativamente entre dos de los jugadores. Sin embargo, hay muchos otros conjuntos estables. Por ejemplo, el conjunto de todos los resultados en los cuales Carol consigue 25 céntimos y el resto del dólar se divide de cualquiera de los modos posibles entre Alice y Bob es estable.

No es fácil explicar estos nuevos conjuntos estables. Otros teóricos de los juegos están en desacuerdo, pero creo que su aparición sólo muestra que la idea de un conjunto estable no es lo suficientemente precisa. Así que en ocasiones existen demasiados conjuntos estables, aunque éste es el menor de nuestros problemas. William Lucas encontró un juego cooperativo con muchos jugadores que carece por completo de conjuntos estables, así que también puede haber un número demasiado bajo de conjuntos estables.

El valor de Shapley

Una vez me convocaron con urgencia a Londres para explicar de qué hablaba el gobierno francés cuando sugirió que el coste del túnel propuesto bajo el Canal de la Mancha se asignara a los países de la Unión Europea mediante el valor de Shapley. Se refería a Lloyd Shapley, otro miembro del brillante grupo de quienes preparaban el doctorado y

estudiaron matemáticas junto a John Nash en Princeton.

Shapley siguió el ejemplo de Nash y propuso un conjunto de supuestos que define una única predicción para el resultado de un juego cooperativo. Sin embargo, a diferencia de Nash, sus supuestos no se aplican únicamente a juegos de negociación de sólo dos jugadores, sino a cualquier juego cooperativo con «utilidad transferible». El principal caso de interés tiene lugar cuando todos los jugadores son neutrales al riesgo y los pagos se miden en dólares. En ese caso podría sostenerse que lo único que importa de una coalición es lo que yo llamaría «valor de la coalición», es decir, el máximo número de dólares cuya disponibilidad para repartir entre sus miembros pueda garantizar. Estos pagos incluyen todos los «pagos compensatorios» necesarios para comprar la lealtad de cualquier miembro de la coalición que pueda pensar que estaría mejor en otro lado.

Por ejemplo, en el Excluido, el valor de cada coalición con dos jugadores es de un dólar. El valor de una gran coalición de los tres jugadores también es de un dólar. El valor de una coalición de un solo miembro es cero. Las coaliciones vacías sin jugadores también tienen un valor de cero.

La forma más fácil de encontrar el valor de Shapley deja claro que está pensado como una *media* de todas las posibles configuraciones en la formación de coaliciones. Se empieza con una coalición vacía y se añaden jugadores hasta que se llega a la gran coa-

lición. Cuando Alice se une a la coalición, se anota su contribución marginal a la coalición: el valor en el cual su inclusión incrementa el valor de la coalición. Los pagos asignados a Alice por el valor de Shapley consisten, entonces, en la media de todas sus contribuciones marginales, tomadas de todas las maneras en que es posible reunir una gran coalición jugador a jugador.

El Juego del Excluido tiene tres jugadores y, por consiguiente, hay seis maneras de ordenar a los jugadores: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB y CBA. Las contribuciones marginales son, respectivamente: 0, 0, 1, 0, 1, 0. Así que el valor de Shapley le asigna a Alice un pago de 1/3 de dólar, que equivale a lo que afirmábamos que obtendría de media en el apartado anterior sobre coaliciones.

¿En qué medida resulta útil el valor de Shapley? Creo que no hay duda de su relevancia para ejercicios sobre la distribución de costes del tipo propuesto por el gobierno francés, pero no funciona demasiado bien cuando se pone a prueba con el programa de Nash. Como muchas otras cosas de la teoría de juegos, todavía no hemos llegado a comprender buena parte de lo referente a la formación de coaliciones.

10. Rompecabezas y paradojas

Los fenómenos que se retroalimentan y la intuición humana son compañeros de viaje incómodos. Por consiguiente, no resulta sorprendente que cuando a la gente no le gusta adónde le conduce un argumento de equilibrio invente argumentos más simples que la lleven a conclusiones más digeribles. No obstante, el primer principio del pensamiento racional consiste en no dejar nunca que tus preferencias influyan en tus creencias.

Falacias del Dilema del Prisionero

Se dice que el hecho de que ambos jugadores estuvieran mejor si no jugaran sus estrategias de equilibrio en el Dilema del Prisionero es una paradoja de la racionalidad que necesita ser resuelta.

El imperativo categórico

En términos coloquiales, el imperativo categórico de Immanuel Kant establece que es racional hacer lo que te gustaría que todo el mundo hiciera. Si fuera cierto, sería racional cooperar en el Dilema del Prisionero. Pero hacerse ilusiones nunca es racional. Para mí, constituye una fuente constante de sorpresa que a Kant nunca se le hayan pedido cuentas por proponer un principio de racionalidad sin ofrecer ninguna razón para tomarlo en serio.

La falacia de los gemelos

Dos personas racionales que afrontan el mismo problema necesariamente optarán por idéntica acción. Así que en el Dilema del Prisionero Alice y Bob jugarán *halcón* los dos o *paloma* los dos. Dado que Alice prefiere el resultado (*paloma, paloma*) a (*halcón, halcón*), debería elegir *paloma*.

La falacia resulta atractiva porque sería correcta si Alice y Bob fueran gemelos genéticamente idénticos y estuviéramos hablando sobre qué comportamiento genéticamente determinado es mejor para la aptitud biológica (véase la «Selección por parentesco» en el Capítulo 8). Pero en ese caso, el juego relevante no sería el Dilema del Prisionero: se trataría de un juego con un solo jugador.

Como es común cuando se analizan las falacias del Dilema del Prisionero, se nos ofrece un análisis

correcto del juego equivocado. El Dilema del Prisionero es un juego de dos jugadores en el cual Alice y Bob eligen sus estrategias *de modo independiente*. La falacia de los gemelos supone incorrectamente que Bob tomará la misma decisión que Alice, sea cual sea la estrategia de ésta. Esto no puede ser cierto, puesto que supuestamente Bob es racional y una de sus dos posibles acciones es irracional.

Pueden modificarse los supuestos de la falacia de modo que las estrategias de Alice y Bob coincidan solamente con una probabilidad suficientemente alta. La historia que se explica para justificar una correlación tal en sus comportamientos a menudo levanta el suficiente polvo para ocultar el hecho de que cualquier tipo de correlación comporta que Alice y Bob no están decidiendo de manera independiente. Sin embargo, si no deciden independientemente, no juegan al Dilema del Prisionero. Aunque la información de Alice y Bob estuviera correlacionada –según se establece como hipótesis en el concepto de equilibrio correlacionado de Aumann–, seguirían sin elegir *halcón*, ya que *halcón* se encuentra fuertemente dominada, independientemente de lo que los jugadores puedan aprender sobre otras cuestiones.

El mito del voto malgastado

Una versión de la falacia de los gemelos se saca a relucir periódicamente en tiempo de elecciones, cuan-

do los entendidos afirman que «cada voto cuenta» (véase «Equilibrio de Nash mixto», Capítulo 2). Si un voto malgastado es aquel que no influye en el resultado de las lecciones, el único momento en el que un voto puede influir es cuando sólo un voto separa al ganador del segundo. Si están separados por dos votos o más, un cambio en tu voto no cambiaría en absoluto quién sale elegido. No obstante, unas elecciones a un escaño de la asamblea nacional casi nunca se deciden por un solo voto.

A continuación se presenta un ejemplo hipotético de elecciones todavía más reñidas que la competición electoral real entre Bush y Gore en Estados Unidos en 2000. Una encuesta de opinión fiable afirma que los votantes de un estado con un papel crucial en las elecciones, y que ya han tomado una decisión, se dividen 51% contra 49% a favor de Bush. La probabilidad de que un votante indeciso se decida por Bush es por sí sola suficiente para asegurar que éste batirá a Gore por una media de 500 votos. La cosa parece tan reñida que Alice decide votar. ¿Qué probabilidad hay de que su voto cuente, es decir, de que el resultado sea distinto que si se hubiera quedado en casa viendo la televisión?

Con un millón de votantes, el 5% de los cuales son indecisos, el voto de Alice contaría solamente una vez cada 8.000 años, aunque las mismas circunstancias excepcionales se repitieran cada cuatro años. Pero no lo harán. Las posibilidades de que los votos emitidos por los indecisos prácticamente equi-

libren los votos de los que se han decidido son infinitesimales. Si los indecisos de nuestro ejemplo votaran a Bush con la misma frecuencia que el resto de la población, el voto de Alice solamene tendría relevancia una vez cada 20 trillones de años. ¡No es ningún milagro que en las elecciones presidenciales ningún estado se haya decidido jamás por un solo voto!

La gente inocente se imagina que aceptar este argumento supone precipitar el desmoronamiento de la democracia. Por consiguiente, se nos dice que estamos equivocados por contar solamente el efecto de nuestro único voto individual –en lugar de ello deberías contar el número total de votos emitidos por todas aquellas personas que piensan y sienten como tú piensas y sientes y que, por consiguiente, votarían como tú–. Si tienes 10.000 de estas almas *gemelas*, tu voto ya no sería desperdiciado, porque la probabilidad de que unas elecciones se decidan por un margen de 10.000 votos o menos a menudo es muy alta. Este argumento falla por la misma razón que la falacia de los gemelos falla en el Dilema del Prisionero: puede haber un gran número de personas que piensen y sientan como tú, pero su decisión de salir de casa y votar no cambiará si te quedas en casa viendo la televisión.

A veces los detractores acusan a los teóricos de los juegos de falta de espíritu público al exponer esta falacia, pero se equivocan al pensar que la democracia se vendría abajo si se animara a la gente a pensar so-

bre la realidad del proceso electoral. Animar en un partido de fútbol es una analogía útil. Pocos gritos de ánimo se darían si lo que la gente intentara hacer al gritar fuera incrementar el nivel general de ruido en el estadio; una sola voz, sea la que sea, no puede marcar una diferencia significativa en el ruido que se hace cuando una multitud grita. Pero nadie grita para incrementar el nivel general de ruido; le gritan palabras de consejo y aliento a su equipo aun cuando están en casa frente a un televisor.

Lo mismo se aplica al voto. Te estás engañando si votas porque tu voto tiene una probabilidad significativa de resultar clave. Pero tiene todo el sentido votar por la misma razón que los aficionados al fútbol le gritan consejos a sus equipos. Asimismo, como es más satisfactorio gritar consejos buenos en lugar de malos, son muchos los teóricos de los juegos que creen que puedes sacar más de participar en unas elecciones si votas *como si* fueras el votante crucial, aunque sepas que la probabilidad de que un voto marque la diferencia es demasiado pequeña para ser significativa. Un kantiano supondría que todo el mundo es estratégico de un modo similar, pero yo prefiero usar las encuestas de opinión para adivinar la forma más probable de que se produzca un empate.

Por ejemplo, Ralph Nader era el candidato ecologista a las elecciones presidenciales en las que Bush venció a Gore. Le doy mucha importancia a los temas ecológicos, pero no habría votado a Nader porque, si hubiera habido un empate, se habría produ-

cido, casi con total seguridad, entre Bush y Gore. En Europa, un voto estratégico de este tipo resultará en ocasiones en el voto a un partido menor. Los mismos entendidos que te dicen que cada voto cuenta te dirán que un voto estratégico como ése es un voto malgastado. ¡O una cosa o la otra, que se decidan!

La falacia de la disposición transparente

Esta falacia nos pide que nos creamos dos proposiciones dudosas. La primera es que los individuos racionales tienen la fuerza de voluntad para comprometerse de antemano a participar en los juegos de un modo determinado. La segunda establece que otras personas pueden interpretar nuestro lenguaje corporal tan bien como para saber cuándo decimos la verdad. Por consiguiente, si afirmamos con sinceridad que hemos adquirido un compromiso irrevocable, nos creerán.

Si estas proposiciones fueran correctas, ¡seguro que nuestro mundo sería muy distinto! La *Expresión de las emociones* de Charles Darwin se equivocaría al negar que nuestros músculos faciales involuntarios hacían imposible esconder nuestro estado emocional y, por lo tanto, los actores se quedarían sin trabajo, los políticos serían incorruptibles, no se podría jugar al Póquer, la racionalidad serviría de defensa contra la adicción a las drogas. No obstante, la lógica de la teoría de juegos seguiría aplicándose.

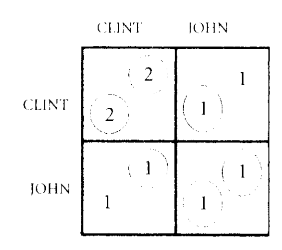
Como ejemplo, analicemos dos disposiciones mentales posibles llamadas CLINT y JOHN. La primera es una «estrategia vengadora», así llamada por el personaje representado por Clint Eastwood en los *spaghetti westerns* (véase la «Evolución de la cooperación», Capítulo 8). La segunda conmemora una película divertidísima que vi una vez, en la cual John Wayne representaba el personaje de Genghis Khan. Elegir la disposición JOHN supone manifestar que te has comprometido a elegir *halcón* en el Dilema del Prisionero en toda circunstancia. Elegir la disposición CLINT supone manifestar que te comprometes a jugar *paloma* en el Dilema del Prisionero sólo y únicamente si tu oponente manifiesta el mismo compromiso. Si no, eliges *halcón.*

Si se permite a Alice y Bob que se comprometan transparentemente con una de estas disposiciones, ya no jugarán al Dilema del Prisionero; jugarán al Juego de las Estrellas de Cine de la Figura 34, en el cual las estrategias de los jugadores son CLINT y JOHN. Si ambos jugadores eligen CLINT en el Juego de las Estrellas de Cine, se comprometen a elegir *paloma* en el Dilema del Prisionero; si no, se comprometen a elegir *halcón.*

Como muestran los pagos rodeados con círculos, CLINT es una estrategia (débilmente) dominante en el Juego de las Estrellas de Cine. Así que si tanto Alice como Bob eligen CLINT, se situarán en un equilibrio de Nash que resulta en la cooperación en el Dilema del Prisionero. Los defensores de la falacia de

	paloma	*halcón*
paloma	2, 2	0, 3
halcón	3, 0	1, 1

Dilema del Prisionero



Juego de las Estrellas de Cine

FIGURA 34. Falacia de la disposición transparente.

la disposición transparente creen que esto demuestra que la cooperación es racional en el Dilema del Prisionero. Si tuvieran razón, sería bonito que en la vida real todos los juegos fueran realmente un Juego de la Estrella de Cine de algún tipo –especialmente si se pudiera escoger ser Adam Smith o Charles Darwin en lugar de John Wayne o Clint Eastwood–. Pero incluso en ese caso, no se podría deducir que la racionalidad exige cooperar en el Dilema del Prisionero. El argumento sólo demuestra que es racional elegir CLINT en el Juego de las Estrellas de Cine.

La paradoja de Newcomb

Hay dos cajas que posiblemente tengan dinero en su interior. Alice es libre de tomar la primera caja o las dos. Si sólo le importa el dinero, ¿qué debería hacer?

Parece un problema fácil. Si *paloma* representa tomar solamente la primera caja y *halcón* tomar ambas, Alice debería escoger *halcón* porque en ese caso consigue, como mínimo, tanto dinero como con *paloma*.

No obstante, hay una trampa. Es seguro que la segunda caja contiene un dólar. La primera caja contiene o bien dos dólares o nada. La decisión de si debería haber dinero en la primera caja le corresponde a Bob, que conoce tan bien a Alice que siempre es capaz de predecir perfectamente lo que ella hará. Como Alice, tiene dos posibilidades, *paloma* y *halcón*. Para él, *paloma* significa meter dos dólares en la primera caja. Su otra posibilidad, *halcón,* consiste en no meter nada en la primera caja. Su motivación es pillar a Alice en falta. Por consiguiente, jugará *paloma* si predice que Alice elegirá *paloma;* jugará *halcón* si predice que jugará *halcón.*

Así que elegir *halcón* ya no parece tan ventajoso para Alice. Si elige *halcón,* Bob predice su elección y no mete nada en la primera caja, así que Alice sólo consigue el único dólar de la segunda caja. Pero si Alice elige *paloma,* Bob predecirá su decisión y pondrá dos dólares en la primera caja para que Alice los tome.

El filósofo de Harvard Robert Nozick creó una moda en su profesión (acertadamente descrita como «newcombmanía») al afirmar que la paradoja de Newcomb demuestra que a veces puedes maximizar tus pagos decidiéndote por una estrategia fuertemente dominada. También podría haber ar-

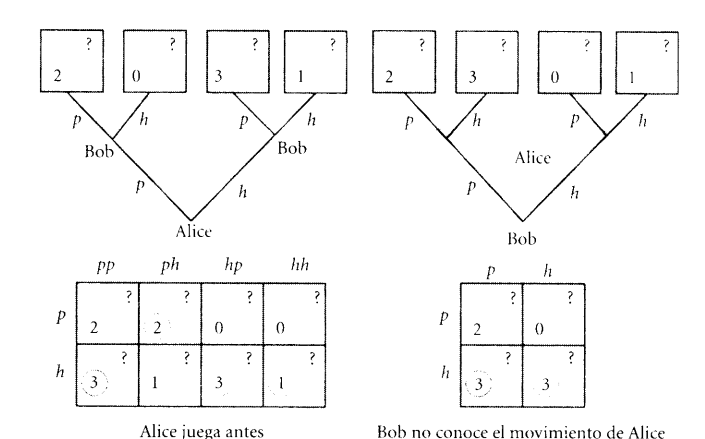


FIGURA 35. Dos intentos de satisfacer los requisitos de Newcomb. El conjunto de información del juego de la derecha indica que Alice no conoce la predicción de Bob. Las tablas de pagos de debajo de cada árbol de decisión son las formas estratégicas relevantes.

gumentado igualmente que ello demuestra que $2 + 2 = 5$, ya que de una contradicción puede deducirse cualquier cosa. La contradicción de la paradoja de Newcomb consiste en suponer la existencia de un juego en el cual:

1. Alice mueve después de Bob.
2. Bob conoce la acción de Alice.
3. Alice dispone de más de una acción.

La Figura 35 muestra dos intentos de crear un juego como ése sin ser concretos sobre los pagos de

Bob; el juego de la izquierda no cumple con el primer componente de la lista, y el de la derecha no cumple con el punto 2. Podemos satisfacer tanto el criterio 1 como el 2 si le ofrecemos a Alice sólo una opción en el juego de la derecha, pero entonces se incumpliría el punto 3.

Cuando defiende que Alice debe jugar *paloma* para maximizar sus pagos, Nozick da por hecho que Bob jugará *p h* en el juego de la izquierda. Esto quiere decir que Bob predecirá *p* cuando Alice juegue *p*, y *h* cuando ella juegue *h*. No obstante, para Alice, en el juego de la izquierda, *h* no es una estrategia dominada. Para defender que la estrategia *h* de Alice en el juego de la izquierda está dominada, debe apelarse al juego de la derecha. No obstante, no resulta paradójico que Alice pueda jugar de un modo distinto en juegos distintos.

Pueden enturbiarse las aguas abandonando el requisito de que Bob puede predecir *a la perfección* el comportamiento de Alice. En ese caso, puede crearse un juego en el que los tres requisitos de la paradoja de Newcomb se satisfagan mediante la introducción de jugadas aleatorias en el juego de la derecha que le arrebaten a Alice la oportunidad de elegir distinto que Bob en algunos momentos. Pero por muchos juegos de manos que se hagan con los parámetros, no se puede hacer que resulte óptimo al elegir una estrategia fuertemente dominada.

La paradoja del examen sorpresa

La subasta de telecomunicaciones británica que recaudó 35.000 millones de dólares se ha mencionado en varias ocasiones. Todo el mundo se sorprendió por esta cantidad enorme –excepto los expertos de los medios, que finalmente acabaron acercándose a la cifra correcta prediciendo un número más alto cada vez que las pujas de la subasta contradecían su predicción anterior–. Todo el mundo puede observar el fraude contra el público perpetrado por los expertos de los medios de comunicación en este caso, pero el fraude no se detecta con tanta facilidad cuando aparece en una de las muchas versiones de la paradoja del examen sorpresa, a través de la cual mucha gente aprende por primera vez acerca de la retroinducción.

Alice es una profesora que le explica a su clase que va a ponerles un examen la semana que viene, pero que el día en que va a hacerse será sorpresa. Bob es un alumno que analiza mediante la retroinducción los días de la semana siguiente. Si Alice no les ha puesto el examen cuando hayan acabado las clases del jueves, Bob supone que entonces no tendrá otra opción que ponerlo el viernes, ya que es el último día de la semana lectiva. Así que si el examen se hiciera el viernes, a Bob no le sorprendería. Por consiguiente, Bob deduce que Alice no puede planear poner el examen el viernes. Pero ello significa que el examen tendrá que llevarse a cabo el lunes, el martes, el miér-

coles o el jueves. Llegado a esta conclusión, Bob aplica el argumento de la retroinducción de nuevo para eliminar el jueves como día posible para el examen. Una vez eliminado el jueves, se encuentra en posición de eliminar el miércoles. Una vez ha eliminado todos los días de la semana lectiva con este método, respira aliviado y no hace ademán alguno de estudiar durante el fin de semana. ¡Pero entonces Alice lo pilla por sorpresa cuando pone el examen a primera hora de la mañana del lunes!

En realidad no se trata en absoluto de una paradoja, porque Bob no debería haber respirado con alivio tan pronto. Si el argumento de la retroinducción es correcto, las dos afirmaciones de Alice son incoherentes y, por lo tanto, al menos una de ellas debe ser incorrecta. Pero ¿por qué debería Bob suponer que la afirmación incorrecta es que se pondrá un examen y no que el examen será una sorpresa? Esta observación suele dejarse de lado, porque en realidad lo que quiere oír la gente es si el argumento de la retroinducción es correcto. Pero lo que tendrían que preguntar es si la retroinducción se ha aplicado al juego adecuado.

En el juego que la gente cree que se está analizando, Alice elige uno de los cinco días para poner el examen y Bob predice por qué día se decidirá. Si la predicción es errónea, Bob se verá sorprendido. La solución de esta versión del Juego de las Monedas es que tanto Alice como Bob eligen cada día con la misma probabilidad. Bob se ve sorprendido cuatro de cada cinco veces.

Ésta no es la conclusión a la que llegamos antes, porque la paradoja del examen sorpresa aplica la retroinducción a un juego en el que a Bob siempre se le permite predecir que el examen tendrá lugar ese mismo día, aunque habría podido predecir erróneamente que iba a tener lugar el día anterior. En este extraño juego, la estrategia óptima de Bob consiste en predecir lunes el lunes, martes el martes, miércoles el miércoles, jueves el jueves y viernes el viernes. ¡No es raro que Bob nunca se vea sorprendido porque el examen se realice en un día que no predijo!

La paradoja del examen sorpresa ha circulado desde hace tanto tiempo como puedo recordar. Ocasionalmente, vuelve a airearse en periódicos y revistas. Siempre ha sido objeto de sesudos artículos en revistas de filosofía. La confusión sigue existiendo porque la gente no responde a las preguntas pertinentes. Una de las principales virtudes de adoptar un razonamiento formal sistemático en la teoría de juegos es que hacerse las preguntas necesarias se torna automático. Entonces no es necesario ser un genio como Von Neumann para seguir el camino adecuado. Su formalismo piensa por ti.

De todos sabido

¿Por qué le damos tanta importancia al contacto visual? Creo que la razón es que algo se convierte en sabido por todos solamente si tiene lugar un aconte-

cimiento que implica que no podría haber ocurrido sin que todo el mundo lo supiera. Por ejemplo, si Alice y Bob se miran el uno al otro al observar que Carol tiene la cara sucia, entre ellos se sabrá que Carol tiene la cara sucia. Análogamente, cuando dos personas se miran a la cara, se convierte en algo sabido por ambos, que son conscientes de la existencia del otro como individuo.

Tres damas de edad

Alice, Beatrice y Carol son tres respetables damas que se encuentran en la feria de un condado del Medio Oeste de los Estados Unidos. Cada una de las tres tiene la cara sucia, pero ninguna se pone colorada de vergüenza, aunque una dama respetable consciente de que tiene la cara sucia en público seguramente lo haría. Se deduce que ninguna de las señoras sabe que tiene la cara sucia, aunque puede ver con claridad las caras sucias de las otras.

Los clérigos del Medio Oeste siempre dicen la verdad y, por lo tanto, las damas prestan mucha atención cuando un pastor del lugar anuncia que una de ellas tiene la cara sucia. Tras este anuncio, una de las damas se sonroja. ¿Cómo es eso? ¿No les había dicho el pastor algo que ya sabían?

Para entender lo que el clerigo añadió a lo que las damas ya sabían, debemos analizar la cadena de razonamientos que lleva a la conclusión de que al me-



FIGURA 36. Tres damas del Medio Oeste.

nos una de las damas debe sonrojarse. Si ni Beatrice ni Carol se sonrojan, Alice razonaría del modo siguiente:

Alice: Supongamos que mi cara estuviera limpia. Entonces Beatrice razonaría del modo siguiente:

Beatrice: Veo que la cara de Alice está limpia. Supongo que la mía también lo está. Entonces Carol razonaría del modo siguiente:

Carol: Veo que las caras de Alice y Beatrice están limpias. Si mi cara estuviera limpia, nadie tendría la cara sucia. Pero el anuncio del pastor demuestra lo contrario. Así que mi cara está sucia y debo sonrojarme.

Beatrice: Como Carol no se ha sonrojado, mi cara está sucia. Así que debo sonrojarme.

Alice: Como Beatrice no se ha sonrojado, mi cara está sucia. Así que debo sonrojarme.

Por lo tanto, ¿qué añadió el pastor a lo que sabían las damas? Para que el razonamiento de Alice funcionara, necesitaba saber que Beatrice sabe que Carol sabe que Alice y Beatrice saben que alguien tiene la cara sucia. Todo este saber sólo es posible cuando el pastor pone en conocimiento de todos que alguien tiene la cara sucia. Entonces no sólo es cierto que Alice, Beatrice y Carol saben que una de ellas tiene la cara sucia; todas saben que todas saben que todas saben que todas lo saben.

Una paradoja de la coordinación

¿Es necesario tener una barba magnífica para hacer progresos en la epistemología interactiva? La única prueba que puedo presentar es que el barbudo filósofo de Princeton David Lewis comparte con el igualmente hirsuto Bob Aumann el mérito de haber reconocido la importancia de la información conocida por todos en la teoría de juegos. Sin embargo, ¿qué vamos a sacar de la afirmación de Lewis de que una convención no puede ser operativa a menos que sea de todos sabido que los jugadores van a usarla?

Para que algo sea sabido por todos, necesitamos un equivalente al clérigo carente de tacto de la historia de las tres damas del Medio Oeste. Pero normalmente no puede encontrarse un clérigo como ése. Casi ninguna de las convenciones que usamos a

diario supera el requisito de Lewis. De modo que, ¿cómo es que parecen funcionar tan bien?

Los científicos informáticos, preocupados por las implicaciones de los sistemas distribuidos, ilustran el problema contando una historia sobre dos generales bizantinos que intentan coordinar un ataque contra un ejército enemigo que se encuentra en un valle entre los dos, pero yo prefiero un ejemplo menos dramático.

Alice y Bob quieren quedar mañana en Nueva York. Por correo electrónico, Alice sugiere que se encuentren en la estación Grand Central a mediodía. Bob envía un correo electrónico de confirmación. Este intercambio sería adecuado para la mayoría de nosotros, pero Lewis alegaría que el acuerdo no es conocido por todos porque Bob no sabe que Alice recibió su confirmación. Por lo tanto, ella debería enviarle un correo electrónico para confirmar que la recibió. A continuación Bob debería enviar por correo electrónico una confirmación de la confirmación de Alice, y así sucesivamente. Dado que siempre existe una pequeña probabilidad de que un mensaje de correo no se reciba, el intento de ponerse de acuerdo sobre una convención nunca llegará a ser sabido por todos.

Pero ¿por qué una convención tendría que ser conocida por todos para resultar operativa? Ariel Rubinstein estudió esta cuestión mediante el análisis de un nuevo Juego del Correo Electrónico en el que el Juego de la Cita se sustituye por el Juego de la

Caza del Ciervo del Capítulo 4. La convención por defecto consiste en que Alice y Bob juegan *paloma* en el Juego de la Caza del Ciervo, pero de vez en cuando las etiquetas de sus dos estrategias se invierten, de forma que jugar *paloma* en realidad supondrá que juegan *halcón*. Sólo Alice se da cuenta de que tiene lugar esta inversión. Le envía un correo electrónico a Bob diciendo que en este caso deberían jugar *halcón* en lugar de *paloma*. Bob envía automáticamente una confirmación. Ella envía automáticamente una confirmación de la confirmación y así sucesivamente.

Una estrategia del Juego del Correo Electrónico establece si se elige *halcón* o *paloma* según el número de mensajes que ha recibido el jugador. Entonces podemos atajar y evitar la cuestión de la información sabida por todos y preguntarnos si existe un equilibrio de Nash del Juego del Correo Electrónico en el cual Alice y Bob siempre tengan éxito al coordinar un equilibrio que ambos prefieran en el Juego de la Caza del Ciervo. La respuesta de Rubinstein parece confirmar la intuición de Lewis. El único equilibrio de Nash en el Juego del Correo Electrónico, en el cual Alice y Bob juegan *paloma* cuando no se manda ningún mensaje, requiere que *siempre* jueguen *paloma* independientemente del número de mensajes que reciban.

Sin embargo, el panorama cambia cuando permitimos a Alice y Bob que elijan si quieren o no enviar mensajes. La versión modificada del Juego del Co-

rreo Electrónico tiene muchos equilibrios de Nash, el más agradable de los cuales requiere que ambos jugadores jueguen *halcón* siempre que Alice proponga hacerlo y Bob dé su aprobación –como cuando los amigos se ponen de acuerdo para encontrarse en una cafetería–. Pero hay otros equilibrios de Nash en los cuales los jugadores acuerdan jugar *halcón* solamente tras un largo intercambio de confirmaciones de confirmaciones. Los anfitriones de refinadas cenas formales sufren equilibrios de este tipo cuando sus huéspedes empiezan a moverse hacia la puerta con una lentitud glacial al final de la velada, parándose a cada centímetro más o menos para que el anfitrión y el invitado puedan asegurarse repetidamente el uno al otro que marcharse a esa hora resulta socialmente aceptable para ambas partes.

La conclusión de sentido común es que las convenciones no necesitan ser conocidas por todos para funcionar. La mayoría de las convenciones son establecidas por las fuerzas de la evolución cultural. En ocasiones, las consideraciones relativas a la estabilidad evolutiva hacen posible eliminar algunos equilibrios de Nash. En la versión modificada del Juego del Correo Electrónico, cabría esperar que las consideraciones de esta clase eliminaran finalmente los equilibrios que generan «largas despedidas» después de las cenas formales, pero el pronóstico no resulta halagüeño. Irónicamente, tan sólo el equilibrio de Rubinstein, en el cual Alice y Bob se inclinan por

paloma independientemente de lo que ocurra, es incapaz de superar un examen adecuado de estabilidad evolutiva.

El Problema de Monty Hall

Alice participa en el viejo concurso de preguntas que presenta Monty Hall. Debe elegir entre tres cajas, de las cuales sólo una contiene un premio. Monty sabe qué caja contiene el premio, pero Alice no. Después de elegir la *caja 2,* Monty abre una de las otras dos cajas que sabe vacía. En ese momento, Alice tiene la oportunidad de cambiar de idea y de elegir la otra caja, ¿qué debería hacer?

La gente suele decir que no importa. Según su razonamiento, la probabilidad de ganar de Alice cuando eligió la *caja 2* era de 1/3 porque había la misma probabilidad de que el premio estuviera en cualquiera de las tres cajas. Cuando se descubre que una de las cajas está vacía, la probabilidad de que la *caja 2* contenga el precio asciende hasta ½, porque ahora cada una de las dos cajas cerradas tiene la misma posibilidad de albergar el premio. Si Alice cambia de caja, su probabilidad de ganar seguirá siendo de ½. Así que, ¿por qué preocuparse de cambiarla?

Aparentemente, Marilyn Vos Savant tiene el coeficiente intelectual más alto jamás registrado. Cuando explicaba en la revista *Parade* que Alice siempre debería cambiar una caja por otra, varios autonom-

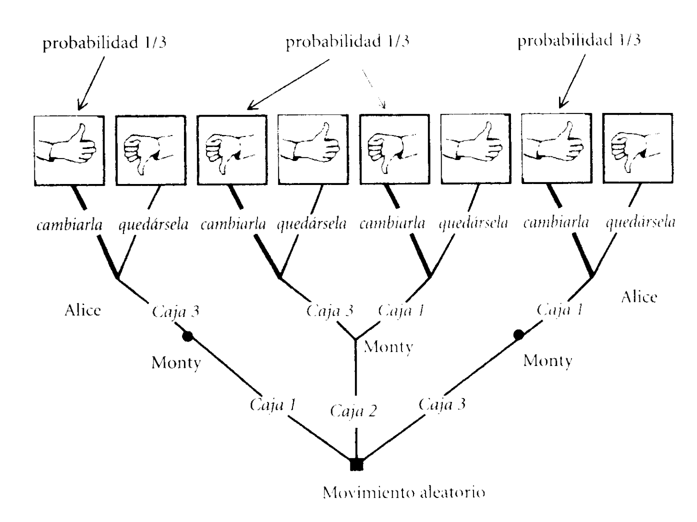


FIGURA 37. Juego de Monty Hall. Sólo se muestran los pagos de Alice. El movimiento aleatorio se muestra como un cuadrado. Los conjuntos de información de Alice muestran que desconoce qué caja contiene el premio, pero sí sabe qué caja abre Monty. La elección de cambiar de caja se destaca con una línea más gruesa. La figura muestra que sea cual sea la estrategia de Monty, Alice gana con una probabilidad de 2/3 si cambia de caja.

brados gurús de la matemática se rieron de ella con desdén, pero tenía razón.

La probabilidad de que el premio esté en la *caja 1* o en la *caja 3* es de 2/3. Si Alice cambia su caja por cualquiera de estas dos que siguen cerradas, Alice ganará con una probabilidad de 2/3.

Este argumento es engañosamente cierto. Incluso los mejores matemáticos son en ocasiones incapaces de entender por qué la acción de Monty le transmite

tanta información a Alice. Después de todo, no le habría transmitido ninguna información útil en absoluto si hubiera abierto una caja al azar que resultara estar vacía. Pero él eligió deliberadamente una caja que sabía vacía.

No obstante, no hay que tener el mayor coeficiente intelectual jamás registrado para obtener la respuesta correcta si se está dispuesto a que Von Neumann piense por uno. La Figura 37 muestra el juego al que juegan Alice y Monty. Los pagos de Monty no importan, pero también podríamos suponer que quiere que Alice pierda. En primer lugar, un movimiento aleatorio introduce el premio en una de las cajas. A continuación Monty decide si abrir la *caja 1* o la *caja 3* (solo tiene una verdadera capacidad de elección cuando el premio se encuentra en realidad en la *caja 2*). Entonces Alice decide si se queda con la *caja 2* o si la cambia por la caja que Monty no ha abierto de entre las otras dos (ya sea la *caja 1* o la *caja 3*).

Ahora ya no hace falta pensar nada. Si Alice siempre cambia, la cifra hace imposible que no se reconozca que gana cuando el premio está en la *caja 1* o la *caja 3*, y pierde cuando está en la *caja 2*. Por lo tanto, gana con una probabilidad de 2/3.

Referencias y bibliografía complementaria

1. A qué jugamos

BINMORE, Ken: *Natural Justice* (Nueva York: Oxford University Press, 2005). Por qué la teoría de juegos es relevante en ética.

—: *Playing for Real* (Nueva York: Oxford University Press, 2007). Este libro de texto sobre teoría de juegos no tiene una matemática complicada.

CAMERER, Colin: *Behavioral Game Theory* (Princeton: Princeton University Press, 2003). Algunos aspectos de la teoría de juegos tienen buenos resultados en laboratorio y otros no. Este libro analiza la evidencia empírica y busca posibles explicaciones psicológicas de las desviaciones respecto a la teoría.

NALEBUFF, Barry y DIXIT, Avinash: *Thinking Strategically* (Nueva York: Norton, 1991) [Trad. Esp.: *Pensar estratégicamente: un arma decisiva en los negocios, la política y la vida diaria*, Antoni Bosch Editor S.A., Barcelona, 1992]. La elección de los clubes de lectura; contiene numerosos ejemplos de teoría de juego en acción, tanto en los negocios como en la vida diaria.

NASAR, Sylvia: *A Beautiful Mind* (Nueva York: Simon and Schuster, 1998) [Trad. Esp.: *Una mente maravillosa*, Mondadori, Barcelona, 2001]. Biografía de John Nash con gran éxito editorial.

RAWLS, John: *A Theory of Justice* (Oxford: Oxford University Press, 1972) [Trad. Esp.: *Teoría de la justicia*, Fondo de Cultura Económica. Madrid, 1977]. A menudo se dice que Rawls es el filósofo de la moral más grande del siglo XX. Se refiere al maximin como el principio de la diferencia cuando lo postula como sustituto racional de la maximización de la utilidad media.

ROTH, Alvin y KAGEL, John: *Handbook of Experimental Game Theory* (Princeton: Princeton University Press, 1995). La encuesta de John Ledyard documenta la inmensa cantidad de datos que respalda la afirmación de que los sujetos experimentados raramente cooperan en el Dilema del Prisionero.

SMITH, John Maynard: *Evolution and the Theory of Games* (Cambridge: Cambridge University Press, 1982). Este maravilloso libro introdujo la teoría de juegos en biología.

VON NEUMANN, John y MORGENSTERN, Oskar: *The Theory of Games and Economic Behavior* (Princeton: Princeton University Press, 1944). No es un *best seller*. Su teoría de la utilidad aparece en un apéndice.

2. La suerte

AUMANN, Robert: *Lectures on Game Theory* (Boulder, CO: Westview Press Underground Classics in Economics, 1989). Notas de clase de uno de los principales teóricos de los juegos.

BINMORE, Ken: *Does Game Theory Work?* (Cambridge, MA: MIT Press, 2007). Este libro incluye mi propio experimento sobre juegos de suma cero, así como referencias a otros.

HEINE, Steve: *John von Neumann and Norbert Wiener* (Cambridge, MA: MIT Press, 1982). Escribo «Von Neumann» en lugar de «von Neumann» porque en algunas zonas del mundo de habla alemana puedes tener problemas por otorgarle el título que su padre le compró al gobierno húngaro.

WILLIAMS, J. D.: *The Compleat Strategyst* (Nueva York: Dover, 1954). Una colección muy agradable de juegos sencillos de dos jugadores y suma cero.

3. Tiempo

AUMANN, Robert: «Interactive Epistemology», *International Journal of Game Theory*, 28 (1999): 263-314.

GARDNER, Martin: *Mathematical Diversions* (Chicago: University of Chicago Press, 1966) y *Hexaflexagons* (Chicago: University of Chicago Press, 1988). Estos libros recogen muchos juegos y rompecabezas agradables de la longeva columna del autor en *Scientific American*.

GIBBONS, Robert: *Game Theory for Applied Economists* (Princeton: Princeton University Press, 1992). Una introducción poco exigente a la teoría de juegos, con un tratamiento ortodoxo de los refinamientos.

LEWIS, David: *Counterfactuals* (Cambridge, MA: Harvard University Press, 1973).

SAMUELSON, Larry: *Evolutionary Games and Equilibrium Selection* (Cambridge, MA: MIT Press, 1997). Incluye nuestro artículo sobre las dinámicas del replicador en el Juego del Ultimátum.

4. Convenciones

BRAMS, Steven: *Superior Beings: If They Exist, How Would We Know? Game Theoretic Implications in Omniscience, Omnipotence, Immortality and Comprehensibility* (Nueva York: Springer Verlag, 1983).

HARSANYI, John y SELTEN, Reinhard: *A General Theory of Equilibrium Selection in Games* (Cambridge, MA: MIT Press, 1988).

HUME, David: *A Treatise of Human Nature* (Oxford: Clarendon Press, 1978; publicado por primera vez en 1739) [Trad. esp.: *Tratado de la naturaleza humana*, Tecnos, Madrid, 2008]. Podría decirse que es la mejor obra filosófica que ha existido.

LEWIS, David: *Conventions* (Princeton: Princeton University Press, 1969).

SCHELLING, Thomas: *Micromotives and Macrobehavior* (Nueva York: Norton, 1978). El solitario de Schelling y mucho más.

—: *The Strategy of Conflict* (Cambridge, MA: Harvard University Press, 1960) [Trad. esp.: *La estrategia del conflicto,* Tecnos, Madrid, 1964]. Una vez Schelling le contó valientemente a un nutrido público de teóricos de los juegos que la teoría de juegos no había hecho contribución alguna del tipo que fuera a la teoría de los puntos focales, ¡excepto, quizás, la idea de la tabla de pagos!

SKYRMS, Brian: *The Stag Hunt and the Evolution of the Social Structure* (Cambridge: Cambridge University Press, 2003) [Trad. esp.: *La caza del ciervo y la evolución de la estructura social,* Melusina, Barcelona, 2007].

YOUNG, Peyton: *Individual Strategy and Social Structure: An Evolutionary Theory of Institutions* (Princeton: Princeton University Press, 1998).

5. Reciprocidad

AXELROD, Bob: *Evolution of Cooperation* (Nueva York: Basic Books, 1984). Este libro le vendió al mundo la idea de que la reciprocidad es importante.

HEINRICH, Joe *et al.* (eds.): *Foundations of Human Sociality: Economic Experiments and Ethnographic Evidence from Fifteen Small-Scale Societies* (Nueva York: Oxford University Press, 2004). Un intento de refutar la explicación de las normas sociales con la repetición de juegos que salió mal. El artículo de la antropóloga Jean Ensminger resulta especialmente instructivo.

MAILATH, George y SAMUELSON, Larry: *Repeated Games and Reputations: Long-Term Relationships* (Nueva York: Oxford University Press, 2006). Los Teoremas Populares con supervisión imperfecta para matemáticos.

«Revisión de *The Complexity of Cooperation* por Ken Binmore», *Journal of Artificial Societies*, http://jasss.soc.surrey.ac.uk/1/1/review1.html. El libro es una secuela de *Evolution of Cooperation*, de Axelrod; la revisión valora su defensa reiterada del TOMA Y DACA. Véase también *Games of Life*, de Karl Sigmund (Capítulo 8, véase más adelante).

TRIVERS, Bob: *Social Evolution* (Menlo Park, CA: Cummings, 1985). Reciprocidad y mucho más en sociedades animales.

6. Información

CRONIN, Helena: *The Ant and the Peacock* (Cambridge: Cambridge University Press, 1991).

HARSANYI, John: *Rational Behaviour and Bargaining Equilibrium in Games and Social Situations* (Cambridge: Cambridge University Press, 1977).

MYERSON, Roger: *Game Theory: Analysis of Conflict* (Cambridge, MA: Harvard University Press, 1991).

7. Subastas

BINMORE, Ken y KLEMPERER, Paul: «The Biggest Auction Ever: The Sale of British 3G Licences», *Economic Journal*, 112 (2002): C74-C96.

CASSADY, R.: *Auctions and Auctioneering* (Berkeley, CA: University of California Press, 1967). Montones de buenas historias.

KLEMPERER, Paul: *Auctions: Theory and Practice* (Princeton: Princeton University Press, 2004).

MILGROM, Paul: *Putting Auction Theory to Work* (Cambridge: Cambridge University Press, 2004).

8. Biología evolutiva

ALCOCK, John: *The Triumph of Sociobiology* (Oxford: Oxford University Press, 2001). Los sociobiólogos no son los fascistas intelectuales que se ha dicho. Aparte de ofrecer maravillosos ejemplos de sociobiología real en acción, este libro pone al descubierto la deshonesta campaña de difamación dirigida contra Edward Wilson y sus seguidores por Gould, Lewontin y otros polemistas con motivaciones políticas.

BINMORE, Ken y SAMUELSON, Larry: «Evolutionary Stability in Repeated Games Played by Finite Automata», *Journal of Economic Theory*, 57 (1992): 278-305.

DAWKINS, Richard: *The Selfish Gene* (Oxford: Oxford University Press, 1976) [Trad. esp.: *El gen egoísta*, Salvat, Barcelona, 1994]. Una de las grandes obras de ciencia divulgativa.

HAMILTON, William: *The Narrow Roads of Geneland* (Oxford: Oxford University Press, 1995). Una recopilación de algunos de los innovadores artículos de Bill Hamilton sobre biología evolutiva. No son artículos fáciles de leer para el profano, pero los comentarios de enlace constituyen un fascinante relato social sobre cómo era ser estudiante de doctorado en los viejos tiempos, haciendo un trabajo tan original que el *establishment* académico era incapaz de apreciar su valor.

HAMMERSTEIN, Peter: *Genetic and Cultural Evolution of Cooperation* (Cambridge, MA: MIT Press, 2003).

SIGMUND, Karl: *Games of Life: Explorations in Ecology, Evolution and Behaviour* (Harmondsworth: Penguin Books, 1993). Entre otros puntos interesantes, este libro informa sobre algunas de las simulaciones por ordenador del autor junto a Martin Nowack. Su denominación del Toma y daca es PAVLOV (véase Capítulo 5).

SMITH, John Maynard: *Evolution and the Theory of Games* (Cambridge: Cambridge University Press, 1984). Muchos ejemplos maravillosos.

WATSON, James: *The Double Helix: A Personal Account of the Discovery of the Structure of DNA* (Nueva York: Touchstone, 1968) [Trad. esp.: *La doble hélice: relato personal del descubrimiento de la estructura del AND*, Alianza Editorial, Madrid, 2007].

WYNNE-EDWARDS, Vero: *Animal Dispersion in Relation to Social Behaviour* (Edimburgo: Oliver and Boyd, 1962).

9. Negociación y coaliciones

BINMORE, Ken: *Playing for Real* (Nueva York: Oxford University Press, 2007). Se dedican cuatro capítulos a temas de negociación.

—: *Natural Justice* (Nueva York: Oxford University Press, 2005). Este libro explica por qué me pongo del lado de Rawls en lugar del de Harsanyi en lo relativo a las implicaciones de usar la posición original para hacer juicios sobre la justicia.

FISHER, Roger *et al.*, *Getting to Yes* (Londres: Houghton Mifflin, 1992) [Trad. esp.: *Obtenga el sí: el arte de negociar sin ceder,* Ediciones Gestión 2000, Barelona, 2004]. Este superventas defiende que la buena negociación consiste en insistir en un acuerdo justo. ¡El pensamiento estratégico se desprecia por ser un truco sucio!

RAIFFA, Howard: *The Art and Science of Negotiation* (Cambridge, MA: Harvard University Press, 1982).

10. Rompecabezas y paradojas

BINMORE, Ken: *Playing Fair: Game Theory and the Social Contract I* (Cambridge, MA: MIT Press, 1995). El capítulo 3 explica más falacias del Dilema del Prisionero que circulan en la literatura filosófica.

FRANK, Bob: *Passions with Reason* (Nueva York: Norton, 1988). Un economista hace una defensa de la falacia de la disposición transparente.

LEWIS, David: *Conventions: A Philosophical Study* (Cambridge, MA: Harvard University Press, 1969).

LITTLEWOOD, J. E.: *Mathematical Miscellany* (Cambridge: Cambridge University Press, 1953). Yo todavía iba al colegio cuando me topé por primera vez con la paradoja de las tres viejas damas en esta popular obra de uno de los más grandes matemáticos.

Índice de ilustraciones

Índice analítico

Índice